

# PRÉPAS SCIENTIFIQUES PSI/PSI\*

CONFORME AU  
NOUVEAU  
PROGRAMME

Coordonné par Jérémy Ferrand et Arnaud Le Diffon

Coécrit par Marc Cavelier • Maxime Champion • Manuel Combes •  
Jérémy Ferrand • Charles Grenier • Jean-Christophe Imbert •  
Arnaud Le Diffon

# Physique

ENTRAÎNEMENT INTENSIF



**Tous les rappels de cours**  
pour réviser les notions  
essentielles en un clin d'œil



**Plus de 150 exercices progressifs**  
en phase avec les attentes  
des concours



**Plus de 110 fiches méthodes**  
pour maîtriser les techniques  
de résolution des exercices



**Tous les corrigés détaillés**



**OFFERT EN LIGNE**

► Toutes les **fiches méthodes**  
à télécharger

Vuibert



PRÉPAS SCIENTIFIQUES  
PSI/PSI\*

CONFORME AU  
NOUVEAU  
PROGRAMME

# Physique

ENTRAÎNEMENT INTENSIF

**Marc Cavalier**

Agrégé de sciences physiques, Docteur en physique des lasers à semiconducteurs de l'Université d'Orsay. Actuellement, enseignant de physique-chimie en CPGE, filière PSI\*, au lycée Chateaubriand à Rennes.

**Maxime Champion**

Agrégé de sciences physiques, Docteur en physique statistique de l'ENS de Lyon. Actuellement enseignant de physique-chimie en CPGE, filière MPI, au lycée Thiers à Marseille.

**Manuel Combes**

Agrégé de sciences physiques, Docteur en physique de l'Université de Bretagne Occidentale. Actuellement, enseignant de physique en CPGE, filière PC, au lycée La Pérouse-Kerichen à Brest, et chercheur associé au laboratoire Geo-Ocean (UMR 6538).

**Charles Grenier**

Agrégé de sciences physiques, Docteur en physique quantique du solide de l'ENS de Lyon. Actuellement enseignant de physique-chimie en CPGE, filière PT, au lycée Marie-Curie à Nogent-sur-Oise.

**Jean-Christophe Imbert**

Agrégé de sciences physiques, Docteur en physique des plasmas de l'Université Paris-Saclay. Actuellement enseignant de physique en CPGE, filière PC/PC\*, au lycée privé Sainte-Geneviève à Versailles.

**Jérémy Ferrand**

Agrégé de sciences physiques, Docteur en mécanique des fluides et matière molle de l'ENS de Lyon. Actuellement professeur agrégé au département de Mesures Physiques de l'IUT d'Orsay, Université Paris-Saclay.

**Arnaud Le Diffon**

Agrégé de sciences physiques, Docteur en physique théorique de l'ENS de Lyon. Actuellement professeur agrégé au département d'Enseignement et de Recherche de Physique et directeur de la préparation à l'Agrégation de physique de l'ENS Paris-Saclay, Université Paris-Saclay.

Vuibert

# RESSOURCES NUMÉRIQUES

**Retrouvez  
nos ressources numériques  
à télécharger**

[www.vuibert.fr/site/213003](http://www.vuibert.fr/site/213003)

**Retrouvez notre collection  
complète ici :**



**ISBN : 978-2-311-21300-3**

La loi du 11 mars 1957 n'autorisant aux termes des alinéas 2 et 3 de l'article 41, d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale, ou partielle, faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause, est illicite » (alinéa 1<sup>er</sup> de l'article 40). Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles 425 et suivants du Code pénal. Le « photocopillage », c'est l'usage abusif et collectif de la photocopie sans autorisation des auteurs et des éditeurs. Largement répandu dans les établissements d'enseignement, le « photocopillage » menace l'avenir du livre, car il met en danger son équilibre économique. Il prive les auteurs d'une juste rémunération. En dehors de l'usage privé du copiste, toute reproduction totale ou partielle de cet ouvrage est interdite. Des photocopies payantes peuvent être réalisées avec l'accord de l'éditeur. S'adresser au Centre français d'exploitation du droit de copie: 20, rue des Grands-Augustins, F-75006 Paris. Tél. : 01 44 07 47 70.

© Vuibert - juillet 2023 - 5, allée de la 2<sup>e</sup> D.B., 75015 Paris - Site Internet: <http://www.vuibert.fr>



# SOMMAIRE

## Partie I. ÉLECTRONIQUE

### **Chapitre 1. Signaux périodiques** **10**

Rappel de cours, p. 10

**1** ▶ Les signaux périodiques et le régime forcé, p. 10 — **2** ▶ Les systèmes linéaires, p. 12 — **3** ▶ Stabilité d'un système linéaire, p. 15

Méthodes, p. 18, Entraînement, p. 27, Corrigés, p. 30

### **Chapitre 2. Amplificateurs linéaires intégrés et rétroaction** **33**

Rappel de cours, p. 33

**1** ▶ Impédances d'entrée et de sortie, p. 33 — **2** ▶ L'amplificateur linéaire intégré (ALI), p. 34 — **3** ▶ Le modèle de l'ALI idéal de gain infini, p. 36

Méthodes, p. 37, Entraînement, p. 48, Corrigés, p. 52

### **Chapitre 3. Oscillateurs** **57**

Rappel de cours, p. 57

**1** ▶ Oscillateur quasi-sinusoïdal, p. 57 — **2** ▶ Oscillateur de relaxation, p. 58

Méthodes, p. 59, Entraînement, p. 68, Corrigés, p. 72

### **Chapitre 4. Introduction à l'électronique numérique** **80**

Rappel de cours, p. 80

**1** ▶ Signaux analogique et numérique, p. 80 — **2** ▶ Théorème de Nyquist-Shannon, p. 81 — **3** ▶ Et en travaux pratiques, p. 83

Méthodes, p. 83, Entraînement, p. 86, Corrigés, p. 88

### **Chapitre 5. Modulation d'amplitude** **94**

Rappel de cours, p. 94

**1** ▶ Modulation de signaux, p. 94 — **2** ▶ Modulation d'amplitude, p. 95 — **3** ▶ Démodulation synchrone, p. 95

Méthodes, p. 97, Entraînement, p. 102, Corrigés, p. 109

## Partie II. TRANSPORT

### **Chapitre 6. Transfert thermique par conduction** **116**

Rappel de cours, p. 116

**1** ▶ Flux thermique et bilan d'énergie, p. 116 — **2** ▶ Conduction dans un milieu immobile, p. 117 — **3** ▶ Couplage conducto-conductif à l'interface solide/fluide, p. 119 — **4** ▶ Ondes thermiques, p. 120

Méthodes, p. 121, Entraînement, p. 136, Corrigés, p. 143

## **Chapitre 7. Diffusion de particules** **154**

Rappel de cours, p. 154

**1** ► Flux particulaire et bilan de matière, p. 154 — **2** ► Diffusion particulaire dans un milieu immobile, p. 155 — **3** ► Approche microscopique, p. 156

Méthodes, p. 156, Entraînement, p. 166, Corrigés, p. 170

## **Chapitre 8. Fluides en écoulement** **176**

Rappel de cours, p. 176

**1** ► Débits et lois de conservation, p. 176 — **2** ► Actions de contact sur un fluide, p. 177 — **3** ► Écoulement interne incompressible et homogène dans une conduite cylindrique, p. 179 — **4** ► Écoulement externe incompressible et homogène autour d'un obstacle, p. 181

Méthodes, p. 183, Entraînement, p. 201, Corrigés, p. 209

# Partie III. BILANS MACROSCOPIQUES

## **Chapitre 9. Bilans mécaniques** **228**

Rappel de cours, p. 228

**1** ► Méthode : bilan de masse, p. 228 — **2** ► Bilan de quantité de mouvement, p. 229 — **3** ► Bilan de moment cinétique, p. 230 — **4** ► Bilan d'énergie cinétique, p. 231

Méthodes, p. 232, Entraînement, p. 242, Corrigés, p. 249

## **Chapitre 10. Premier et second principes de la thermodynamique** **259**

Rappel de cours, p. 259

**1** ► Définitions, p. 259 — **2** ► Principes de la Thermodynamique, p. 260 — **3** ► Identité thermodynamique, p. 261 — **4** ► Gaz parfait, gaz réels, p. 261 — **5** ► Transitions de phase, p. 262

Méthodes, p. 262, Entraînement, p. 274, Corrigés, p. 277

## **Chapitre 11. Bilans thermodynamiques en écoulement** **284**

Rappel de cours, p. 284

**1** ► Premier principe thermo-industriel, p. 284 — **2** ► Application aux machines thermiques cycliques réelles, p. 285

Méthodes, p. 288, Entraînement, p. 302, Corrigés, p. 313

# Partie IV. ÉLECTROMAGNÉTISME

## **Chapitre 12. Électrostatique - Condensateurs** **324**

Rappel de cours, p. 324

**1** ► Le champ électrique et ses sources, p. 324 — **2** ► Propriétés du champ électrique, p. 325 — **3** ► Propriétés locales et globales du champ électrostatique, p. 327 — **4** ► Condensateurs, p. 329

Méthodes, p. 331, Entraînement, p. 346, Corrigés, p. 349

## **Chapitre 13. Magnétostatique** **361**

Rappel de cours, p. 361

**1** ► Le champ magnétique et ses sources, p. 361 — **2** ► Propriétés du champ magnétique - Théorème d'Am-père, p. 362

Méthodes, p. 365, Entraînement, p. 371, Corrigés, p. 374

<b>Chapitre 14. Équations de Maxwell - Approximation des régimes quasi stationnaires</b>	<b>384</b>
Rappel de cours, p. 384	
1 ► Conservation de la charge - Équations de Maxwell, p. 384 — 2 ► Cas limites, p. 386 — 3 ► Conséquences intégrales des équations de Maxwell, p. 387	
Méthodes, p. 388, Entraînement, p. 396, Corrigés, p. 399	
<b>Chapitre 15. Transport du courant électrique</b>	<b>412</b>
Rappel de cours, p. 412	
1 ► Généralités sur le transport de charge, p. 412 — 2 ► Réponse locale d'un conducteur - Modèle de Drude et aspects énergétiques, p. 414	
Méthodes, p. 415, Entraînement, p. 418, Corrigés, p. 420	
<b>Chapitre 16. Milieux ferromagnétiques</b>	<b>425</b>
Rappel de cours, p. 425	
1 ► Moments et dipôles magnétiques, p. 425 — 2 ► Magnétisme local, p. 428 — 3 ► Phénoménologie des matériaux ferromagnétiques, p. 429	
Méthodes, p. 431, Entraînement, p. 438, Corrigés, p. 441	
<b>Partie V. CONVERSION DE PUISSANCE</b>	
<b>Chapitre 17. Puissance en régime sinusoïdal forcé</b>	<b>448</b>
Rappel de cours, p. 448	
1 ► Facteur de puissance, p. 448 — 2 ► Cas d'une impédance, p. 449	
Méthodes, p. 450, Entraînement, p. 454, Corrigés, p. 456	
<b>Chapitre 18. Transformateur</b>	<b>460</b>
Rappel de cours, p. 460	
1 ► Transformateur idéal, p. 460 — 2 ► Conversion de puissance, p. 463	
Méthodes, p. 463, Entraînement, p. 467, Corrigés, p. 471	
<b>Chapitre 19. Conversion électro-magnéto-mécanique</b>	<b>476</b>
Rappel de cours, p. 476	
1 ► Contacteur en translation, p. 476 — 2 ► Machine synchrone, p. 478 — 3 ► Machine à courant continu, p. 483	
Méthodes, p. 488, Entraînement, p. 498, Corrigés, p. 512	
<b>Chapitre 20. Conversion électronique de puissance</b>	<b>524</b>
Rappel de cours, p. 524	
1 ► Généralités, p. 524 — 2 ► Sources, p. 526 — 3 ► Hacheur série, p. 528 — 4 ► Onduleur, p. 530	
Méthodes, p. 532, Entraînement, p. 539, Corrigés, p. 547	

## Partie VI. ONDES

### **Chapitre 21. Propagation non-dispersive** **562**

Rappel de cours, p. 562

**1** ► Équation d'onde, p. 562 — **2** ► Solution de l'équation d'onde, p. 563 — **3** ► Onde progressive ou stationnaire, p. 565

Méthodes, p. 566, Entraînement, p. 574, Corrigés, p. 577

### **Chapitre 22. Propagation linéaire, dispersion et absorption** **583**

Rappel de cours, p. 583

**1** ► Propagation linéaire, p. 583 — **2** ► Propriétés de la propagation, p. 584 — **3** ► Compléments sur les ondes électromagnétiques, p. 585 — **4** ► Interface entre deux milieux, p. 586

Méthodes, p. 586, Entraînement, p. 601, Corrigés, p. 607

### **Chapitre 23. Ondes sonores dans les fluides** **625**

Rappel de cours, p. 625

**1** ► Mise en équation, p. 625 — **2** ► Énergie d'une onde acoustique, p. 626 — **3** ► Effet Doppler, p. 627

Méthodes, p. 628, Entraînement, p. 635, Corrigés, p. 638

## Partie VII. TRAVAUX PRATIQUES

### **Chapitre 24. Résolution et mise en pratique de techniques expérimentales** **646**

Entraînement, p. 646, Corrigés, p. 673

## Avant-propos

Le présent ouvrage est conforme au programme de Physique 2021 de la classe de PSI, entré en vigueur à la rentrée 2022. Il ne se substitue en aucun cas à l'enseignement et à la formation délivrés dans les classes préparatoires de deuxième année. Il a été construit pour être utilisé par l'élève en complément de son cours, soit en parallèle afin de favoriser l'acquisition des apprentissages, soit dans un deuxième temps pour permettre un entraînement intensif tout au long de l'année en vue des concours. L'objectif est d'accroître les compétences des élèves en matière de modélisation et de résolution de problèmes de physique.

Chaque chapitre démarre par un très bref rappel de l'ensemble des notions de cours nécessaires à la résolution des méthodes et exercices. Il comprend l'ensemble des définitions, propriétés et théorèmes à connaître. Cette partie n'a pas vocation à être un cours exhaustif de classe préparatoire ; elle met en avant les points les plus importants.

Chaque chapitre propose une partie Méthodes, permettant de tester directement la compréhension des éléments-clés du chapitre et de faciliter leur apprentissage. Il s'agit de problèmes parfois abordés en cours, de démonstrations de cours servant de base à un raisonnement ou d'exercices dits « classiques », qu'il est nécessaire de bien maîtriser. Le corrigé positionné directement après l'énoncé permet d'avancer pas à pas et de s'approprier des compétences indispensables avant d'aller plus loin.

Enfin, une partie Exercices permet de consolider les acquis de chaque chapitre, de développer des automatismes et de s'entraîner sur des problèmes originaux, adaptés ou non d'épreuves de concours. Les corrigés des exercices sont placés à part en fin de chapitre afin de laisser aux lecteurs le temps de réflexion nécessaire pour appréhender les exercices, et ne consulter les corrections que dans un second temps. Ces différentes typologies d'exercices permettent de balayer un grand nombre de thématiques et d'attentes des jurys de concours d'entrée aux Grandes Écoles d'ingénieurs et aux Écoles Normales Supérieures. Les auteurs de cet ouvrage sont par ailleurs membres de plusieurs jurys de concours.

Une des spécificités de l'ouvrage est d'inclure un entraînement sur des aspects expérimentaux. Ce chapitre s'organise autour de thématiques et de compétences expérimentales exigibles dans les programmes. Le format « TP-exercices » permettra aux lecteurs d'aborder le fonctionnement de certains dispositifs expérimentaux à travers des exercices, et de s'entraîner sur des exercices nécessitant d'interpréter des protocoles et des résultats expérimentaux. Ce chapitre ne peut bien évidemment pas se substituer à une pratique expérimentale pendant les enseignements de Travaux Pratiques en CPGE.

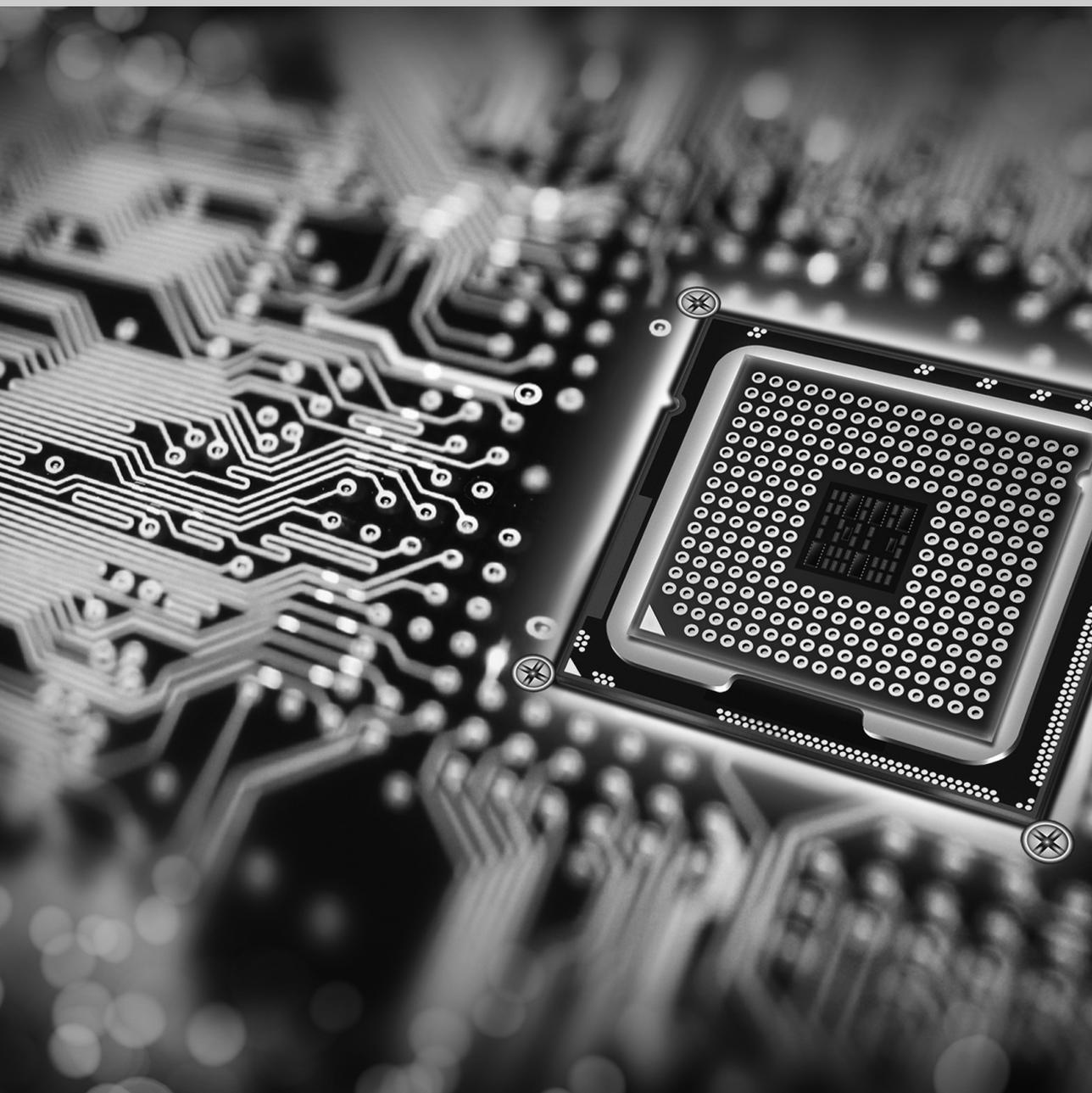
Les auteurs espèrent que cet ouvrage d'entraînement sera le compagnon idéal des élèves de deuxième année de CPGE, leur permettant de consolider tout au long de l'année leur préparation des épreuves écrites et orales, et qu'il contribuera à leur réussite aux concours d'entrée tout en participant à leur formation scientifique.

Les auteurs.



# PARTIE 1

# Électronique



# Signaux périodiques

## Objectifs et compétences du programme

Capacités principales à maîtriser	Méthodes associées	Exercices associés
Action d'un filtre linéaire du premier ou du second ordre sur un signal périodique.	1 à 4	Tous

## RAPPELS DE COURS

Le début du chapitre contient de nombreux rappels indispensables du cours de première année.

### 1. Les signaux périodiques et le régime forcé

#### 1.1. Définitions



#### Définition 1.1. Caractéristiques de signaux périodiques

Un signal  $s(t)$  est **périodique** si et seulement si il existe une **période**  $T$  minimale telle que, pour tout instant  $t$ , on a :

$$s(t + T) = s(t) .$$

On définit la **fréquence** (fondamentale)  $f$  d'un signal par la relation :  $f = \frac{1}{T}$  . On définit de plus la

**pulsation**  $\omega$  d'un signal par  $\omega = 2\pi f$  .

On définit enfin la **valeur moyenne** du signal périodique  $s(t)$  de période  $T$  par la relation :

$$\langle s(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} s(t) dt .$$

Par exemple, le signal  $s(t) = a \sin(\omega t)$  est de période  $T = \frac{2\pi}{\omega}$  et de fréquence  $f = \frac{\omega}{2\pi}$  . Il est de plus de valeur moyenne nulle.



#### Définition 1.2. Valeur efficace d'un signal périodique

On définit la **valeur efficace** comme la valeur constante qui fournirait la même puissance. Mathématiquement, elle se définit sur un signal périodique  $s(t)$  de période  $T$  par la relation :

$$s_{\text{eff}} = \sqrt{\langle s^2(t) \rangle} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T s^2(t) dt} .$$

On peut montrer pour un signal sinusoïdal  $s(t) = a \sin(\omega t)$  que  $s_{\text{eff}} = \frac{a}{\sqrt{2}}$ .

La grandeur physique pertinente n'est pas l'amplitude des signaux, mais leur énergie et la valeur moyenne de l'énergie. Or, l'énergie dépend des signaux mis au carré. Ainsi, un signal de valeur moyenne nulle transporte une énergie proportionnelle à  $s_{\text{eff}}^2$ .

## 1.2. La notation complexe



### Définition 1.3. Nombre complexe

Lors de l'étude des signaux, on note  $j$  le nombre complexe tel que :

$$j^2 = -1.$$

On utilise cette notation en électronique pour ne pas confondre ce nombre complexe avec l'intensité du courant électrique, noté généralement  $i$ .

### Propriété 1.4. Notation complexe

Prenons la fonction réelle  $u(t) = U \cos(\omega t + \varphi)$ . L'application de la formule mathématique d'Euler implique que  $u(t)$  est la partie réelle d'une exponentielle complexe, soit :

$$U \cos(\omega t + \varphi) = \text{Re} \left( U e^{j(\omega t + \varphi)} \right).$$

En s'appuyant sur la propriété précédente, plutôt que de manipuler des fonctions sinusoïdales, on utilisera toujours la forme exponentielle complexe, plus simple à manipuler grâce à la propriété de l'exponentielle  $e^a e^b = e^{a+b}$ .



### Définition 1.5. Amplitude complexe

Soit le signal physique  $u(t) = U \cos(\omega t + \varphi)$ . Sa notation complexe est  $\underline{u}(t) = U e^{j\varphi} e^{j\omega t}$ . On note l'**amplitude complexe** du signal  $u(t)$   $\underline{U} = U e^{j\varphi}$ .

À partir de l'amplitude complexe, on déduit :

▷ l'**amplitude réelle** du signal  $U = |\underline{U}|$  ;

▷ la **phase** du signal  $\varphi = \arg \underline{U}$  .

Le soulignement permet de ne pas oublier que l'on manipule des grandeurs complexes.

#### Remarque

Si le signal est un sinus au lieu d'un cosinus, cela ajoute un déphasage de  $\frac{\pi}{2}$  dans l'exponentielle. Cependant, cela ne change rien au raisonnement global.

Calculons la dérivée du signal complexe  $\underline{u}(t)$ . On a :

$$\frac{d\underline{u}(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \underline{U} e^{j\omega t} \right) = \underline{U} \frac{d(e^{j\omega t})}{dt} = \underline{U} j\omega e^{j\omega t} = j\omega \underline{u}(t).$$

**Propriété 1.6. Dérivation temporelle en notation complexe**

La dérivation temporelle du signal complexe  $\underline{u}(t)$  correspond à une multiplication par  $j\omega$ .

Cette propriété permet de simplifier grandement tous les calculs de dérivée, et même d'intégrales.

**1.3. Le régime forcé en électronique et impédances**

On appelle **régime sinusoïdal forcé** un régime physique pour lequel un système est soumis à une excitation purement sinusoïdale. Il a été montré sur les systèmes linéaires électriques et mécaniques étudiés en première année que ce régime impose que toutes les grandeurs physiques (courants, tensions, positions, vitesses...) sont aussi sinusoïdales de même pulsation que l'excitation. On peut donc entièrement traiter les problèmes forcés en notation complexe à l'aide des impédances.

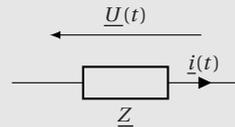


**Définition 1.7. Impédance**

On définit l'**impédance**  $\underline{Z}$  d'un dipôle comme le rapport entre la tension  $\underline{u}(t)$  et l'intensité du courant  $\underline{i}(t)$  en convention récepteur, soit la **loi d'Ohm en régime sinusoïdal forcé**  $\underline{u}(t) = \underline{Z} \underline{i}(t)$ . L'impédance électrique  $\underline{Z}$  a la dimension d'une résistance, l'unité de son module est l'ohm.

On rappelle les impédances des dipôles usuels :

- $\underline{Z}_R = R$  pour une résistance  $R$ ;
- $\underline{Z}_L = jL\omega$  pour une inductance  $L$ ;
- $\underline{Z}_C = \frac{1}{jC\omega}$  pour une capacité  $C$ .

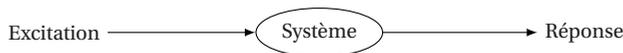


**Figure 1.1.** Une impédance en convention récepteur.

**2. Les systèmes linéaires**

**2.1. Introduction aux systèmes linéaires**

Nous considérons ici, de façon générale, les systèmes physiques et leurs réponses à une excitation. Schématiquement, on note :



Prenons par exemple le plantage d'un clou dans un mur. Le système étudié est le clou, tandis que l'excitation est l'action du marteau et la réponse, la profondeur d'enfoncement du clou.

De façon générale, pour décrire les phénomènes physiques, il faut les modéliser. Cela passe d'abord par une formalisation, souvent mathématique, et sous certaines hypothèses, de la réponse du système, puis par une vérification des prédictions du modèle au regard de l'expérience à une échelle donnée.

Dans l'exemple du clou, on suppose celui-ci incompressible et non déformable. Sur une échelle de l'ordre du centimètre avec des coups de marteau peu violents, c'est une bonne description. Si l'on regarde à l'échelle nanométrique, chaque coup de marteau déforme le clou. De même, un coup trop violent risque de le déformer.

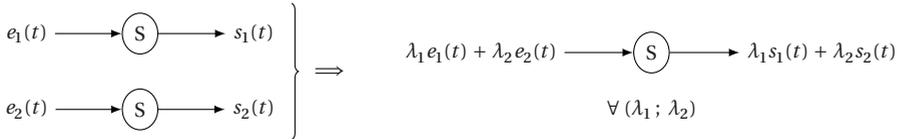
## 2.2. Les systèmes linéaires à invariance temporelle

En première approximation, lorsque c'est possible, on choisit une modélisation linéaire des systèmes.

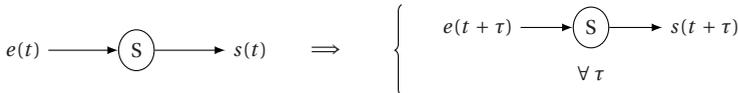
Il ne faut toutefois pas oublier qu'une modélisation linéaire présente des limites ! Par exemple, la force exercée par un ressort est proportionnelle à son élongation. Une modélisation linéaire, explicitée en première année, est donc vraisemblable. Toutefois, si le ressort est trop allongé, il se déforme de façon définitive, le modèle linéaire n'est alors plus adapté.

Un système linéaire invariant dans le temps est un système qui obéit aux propriétés :

- de linéarité entre l'entrée et la sortie :



- d'invariance temporelle. Cela signifie en particulier que l'on néglige tout phénomène de vieillissement et que la réponse à une même excitation est toujours la même :



## 2.3. Les systèmes décrits par une équation différentielle linéaire à coefficients constants

Tous les systèmes décrits par une équation différentielle linéaire à coefficients constants vérifient les propriétés des systèmes linéaires à invariance temporelle. Dans le cas général, ces systèmes sont décrits par une équation de la forme :

$$\sum_{i=0}^n a_i \frac{d^i s(t)}{dt^i} = \sum_{k=0}^m b_k \frac{d^k e(t)}{dt^k}, \quad (1.1)$$

avec tous les  $a_i$  et  $b_k$  des coefficients constants.

Tous les systèmes électroniques composés uniquement de composants linéaires, comme les résistances, les condensateurs et les inductances, sont descriptibles par une telle équation différentielle. Par analogie, il en est de même pour tous les systèmes mécaniques soumis à des forces constantes ou linéaires en la vitesse.

## 2.4. La fonction de transfert

Tout d'abord, recherchons la réponse à une excitation sinusoïdale  $e(t) = e_0 \cos(\omega t)$ . Pour cela, passons en notation complexe pour simplifier les opérations dérivées. Le second membre de l'équation (1.1) s'écrit alors :

$$\sum_{k=0}^m b_k \frac{d^k e(t)}{dt^k} = e_0 \operatorname{Re} \left( \left( \sum_{k=0}^m b_k (j\omega)^k \right) e^{j\omega t} \right).$$

En revenant à une écriture réelle, ce terme peut s'écrire comme  $e_0 B \cos(\omega t + \varphi_e)$  avec  $B$  et  $\varphi_e$  qui dépendent des coefficients  $b_k$ .

Nous recherchons maintenant une solution particulière à l'équation différentielle (1.1), sachant que le second membre est une fonction sinusoïdale. Dans ce cas, la résolution mathématique nécessite la recherche de la solution  $s(t)$  sous la forme d'une fonction sinusoïdale de même pulsation que l'excitation, d'amplitude  $s_0$

inconnue et, éventuellement, avec un déphasage  $\varphi_s$  inconnu. Ainsi, nous posons  $s(t) = s_0 \operatorname{Re} \left( e^{j(\omega t + \varphi)} \right)$ . L'équation (1.1) devient, en notation complexe :

$$s_0 e^{j\varphi} \left( \sum_{i=0}^n a_i (j\omega)^i \right) e^{j\omega t} = e_0 \left( \sum_{k=0}^m b_k (j\omega)^k \right) e^{j\omega t} .$$



### Définition 1.8. Fonction de transfert complexe

On définit la **fonction de transfert complexe** d'un système linéaire par :

$$\boxed{H(\omega) = \frac{\underline{s}}{\underline{e}}} = \frac{s_0}{e_0} e^{j\varphi} = \frac{\sum_{k=0}^m b_k (j\omega)^k}{\sum_{i=0}^n a_i (j\omega)^i} , \quad \text{avec } \varphi = \varphi_s - \varphi_e$$

où l'on note les amplitudes complexes  $\underline{s} = s_0 e^{j\varphi}$  et  $\underline{e} = e_0$ . Avec cette écriture, on constate immédiatement que l'amplitude et la phase de la réponse sont données par :

$$\boxed{s_0(\omega) = |H(\omega)| e_0} \quad \text{et} \quad \boxed{\varphi(\omega) = \arg(H(\omega))} ,$$

avec les fonctions modules  $|\cdot|$  et argument  $\arg$  d'un nombre complexe.

### Remarque

En électronique, pour trouver la fonction de transfert, on préférera utiliser les impédances et les lois générales de l'électrocinétique (lois des mailles, des nœuds, ponts diviseurs, etc.) plutôt que de passer par l'équation différentielle. Réciproquement, l'utilisation de la fonction de transfert permet de retrouver l'équation différentielle.

### Propriété 1.9. Réponse d'un système

Pour une excitation sinusoïdale donnée, la fonction de transfert  $H(\omega)$  permet de trouver la réponse au système. Ainsi, en régime forcé, on a :

$$e(t) = e_0 \cos(\omega t) \longrightarrow \textcircled{S} \longrightarrow s(t) = |H(\omega)| e_0 \cos(\omega t + \varphi(\omega))$$

## 2.5. Application au filtrage linéaire

### 2.5.1. Le théorème de Fourier

#### Théorème 1.10. Décomposition de la série de Fourier

Tout signal périodique se décompose comme une somme de fonctions sinusoïdales. Ainsi, un signal  $s(t)$  périodique de fréquence  $f$  s'écrit :

$$s(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} c_n \cos(2\pi n f t + \varphi_n) ,$$

avec  $c_0$  la valeur moyenne du signal (ou composante continue),  $c_n$  et  $\varphi_n$  des coefficients dépendant du signal. Les différents coefficients  $c_n$  représentent le spectre du signal.

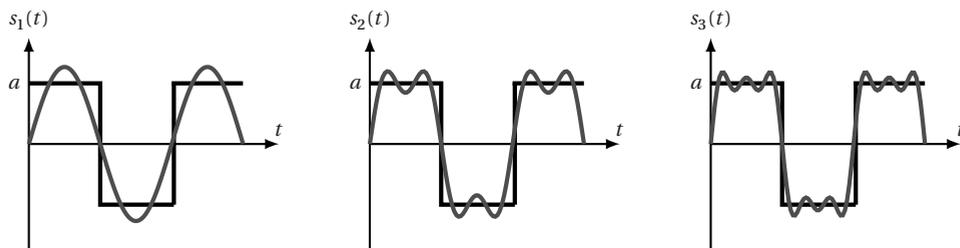
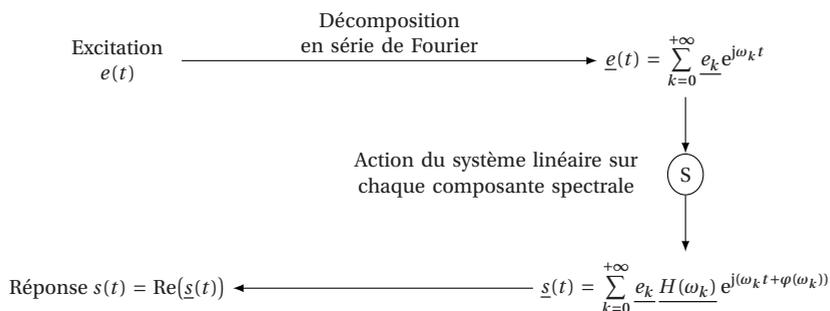


Figure 1.2. Décomposition de Fourier d'un créneau avec les trois premières harmoniques.

### 2.5.2. Utilisation de la fonction de transfert

Le traitement du signal à l'aide du théorème de Fourier est un outil qui permet d'étudier simplement la réponse du système. En effet, pour une excitation périodique quelconque, le signal  $e(t)$  peut s'écrire comme une série de Fourier. Le système étant linéaire, chaque composante harmonique  $\omega_k$  donne une réponse que l'on calcule grâce à la fonction de transfert  $H(\omega_k)$ . La réponse finale du système sera donnée par la somme de toutes les réponses aux composantes harmoniques. Il s'agit d'une opération de filtrage. Pour plus de détails, référez-vous à votre cours de première année.



## 3. Stabilité d'un système linéaire

Dans cette partie, nous nous restreignons à des fonctions de transfert d'ordre 2 au maximum. Nous considérons donc deux types d'équations différentielles :

- celles d'ordre un du type suivant, avec  $\alpha$  et  $\beta$  des constantes réelles non-nulles :

$$\alpha \frac{ds(t)}{dt} + \beta s(t) = F[e(t)] ; \tag{1.2}$$

- celles d'ordre deux du type suivant, avec  $a$ ,  $b$  et  $c$  des constantes réelles non-nulles :

$$a \frac{d^2s(t)}{dt^2} + b \frac{ds(t)}{dt} + cs(t) = F[e(t)] . \tag{1.3}$$

Dans les deux cas, nous avons noté  $F[e(t)]$  une certaine relation différentielle linéaire sur la fonction  $e(t)$  qui ne nous intéresse pas ici.

On rappelle que les solutions de ces équations sont sous la forme de la somme d'une solution de l'équation homogène et d'une solution particulière de l'équation différentielle. Si l'excitation  $e(t)$  est bornée, il est possible de montrer mathématiquement que la solution particulière ne diverge jamais. Une éventuelle divergence des solutions de ces équations au cours du temps est donc caractérisée par une divergence de la solution de l'équation homogène. Ainsi le critère de stabilité d'un système est que la valeur absolue de la solution homogène tend vers 0 pour un temps infini :  $\lim_{t \rightarrow +\infty} |s_{SH}(t)| = 0$ .

RAPPELS DE COURS

MÉTHODES

ENTRAÎNEMENTS CORRIGÉS

### 3.1. Stabilité du régime transitoire des systèmes d'ordre un

Les solutions de l'équation homogène (1.2) sont de la forme  $s_{SH}(t) = Ae^{-\frac{\beta t}{\alpha}}$  avec  $A$  une constante.

Dans tous les exemples de première année,  $\frac{\beta}{\alpha}$  était toujours positif. Ainsi, cette solution tend vers 0 lorsque le temps tend vers l'infini. Il s'agit du régime transitoire.

Toutefois, si l'équation différentielle du système impose  $\frac{\beta}{\alpha} < 0$ , alors la solution précédente diverge lorsque le temps tend vers l'infini. On parle alors de régime transitoire instable.

### 3.2. Stabilité du régime transitoire des systèmes d'ordre deux

Les solutions de l'équation homogène de l'équation (1.3) sont de la forme  $s_{SH}(t) = Be^{r_+t} + Ce^{r_-t}$  où  $r_+$  et  $r_-$  sont les solutions éventuellement complexes du polynôme caractéristique  $ax^2 + bx + c = 0$  et  $B$  et  $C$  des constantes.

#### 3.2.1. Cas du régime pseudo-périodique

Considérons le cas où le discriminant  $\Delta = b^2 - 4ac$  est négatif. Les solutions du polynôme caractéristique sont les nombres complexes  $r_{\pm} = \frac{-b \pm j\sqrt{|\Delta|}}{2a}$ . La solution homogène est donc le produit d'une fonction exponentielle  $e^{-\frac{bt}{2a}}$  et de fonctions sinusoïdales, nécessairement majorées par définition de ce type de fonction.

Ainsi, si  $\frac{b}{a} > 0$ , le terme exponentiel tend vers 0 et le régime transitoire est fini. Cependant, si  $\frac{b}{a} < 0$ , le terme exponentiel tend vers l'infini lorsque le temps augmente. Le régime transitoire est donc instable.

#### 3.2.2. Cas du régime apériodique

Considérons le cas où le discriminant  $\Delta = b^2 - 4ac$  est positif. Les solutions de l'équation caractéristique sont alors  $r_- = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$  et  $r_+ = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ . La solution homogène est donc la somme de deux fonctions réelles exponentielles. Comme  $r_- < r_+$ , si  $r_+ < 0$ , les deux exponentielles tendent vers 0 et le régime transitoire est stable. À l'inverse, si  $r_- > 0$ , alors au moins une des deux exponentielles tend vers l'infini et le régime transitoire est instable. Plusieurs cas sont possibles :

- si  $\frac{c}{a} < 0$ , cela signifie que le produit des racines est négatif, donc qu'une des deux racines est positive. Le régime transitoire va diverger;
- si  $\frac{c}{a} > 0$ , les deux racines sont du même signe que  $-\frac{b}{a}$ , car la somme des racines vaut justement  $-\frac{b}{a}$ . Si cette somme est positive, alors les deux racines sont positives et le régime transitoire va encore diverger.

### 3.3. Critère simplifié de stabilité du régime transitoire d'un système linéaire

On peut regrouper les résultats précédents dans la propriété suivante.

**Propriété 1.11. Critère simplifié de stabilité à partir de l'équation différentielle**

Pour que le régime transitoire d'un système d'ordre 1 ou 2 soit stable, il suffit que tous les coefficients de l'équation différentielle soient de même signe.

Remarquons que cette instabilité a nécessairement des limites. En effet, une divergence de la solution nécessite, d'un point de vue physique, de fournir au système une énergie infinie. Un tel cas étant bien entendu impossible, l'instabilité va être limitée par des éléments non linéaires du système, qui sortent du modèle que nous venons de décrire.

### 3.4. Utilisation de la fonction de transfert

Nous avons vu précédemment que l'étude en régime forcé se réduisait à l'étude de la fonction de transfert  $\underline{H}(\omega)$ . Il en est de même pour l'étude de la stabilité du régime transitoire. En effet, les coefficients de l'équation différentielle se retrouvent dans la fonction de transfert :

- la fonction de transfert de l'équation différentielle d'ordre un (1.2) est donnée par :

$$\underline{H}(\omega) = \frac{\underline{F}(\omega)}{\alpha j\omega + \beta} ;$$

- la fonction de transfert de l'équation différentielle d'ordre deux (1.3) est donnée par :

$$\underline{H}(\omega) = \frac{\underline{F}(\omega)}{c - a\omega^2 + bj\omega} = \frac{\underline{F}(\omega)}{c + bj\omega + a(j\omega)^2} .$$

Dans les deux cas, on a noté  $\underline{F}(\omega)$  la forme complexe indépendante du temps de la relation différentielle  $F[e(t)]$ .

Ainsi, le résultat précédent de stabilité se traduit par la propriété suivante.

#### Propriété 1.12. Critère de stabilité à partir de la fonction de transfert

Pour que le régime transitoire d'un système linéaire d'ordre 1 ou 2 soit stable, il suffit que les coefficients du polynôme en  $j\omega$  au dénominateur de la fonction de transfert soient de même signe.

#### Remarque

En remplaçant  $j\omega$  par  $p$ , on retrouve le polynôme caractéristique associé à l'équation différentielle. Les racines de ce polynôme constituent les *pôles* de la fonction de transfert. Pour que le système soit stable, il faut que les pôles soient strictement négatifs ou à partie réelle strictement négative.

L'étude de la fonction de transfert symbolique  $H(p)$  et de la position des pôles dans le plan complexe est du ressort des Sciences Industrielles.

Il faut bien étudier les signes des coefficients du polynôme en  $j\omega$ . En effet, si l'on remplace  $j^2$  par  $-1$ , un signe négatif apparaît, ce qui n'implique absolument pas l'instabilité.

#### Remarque

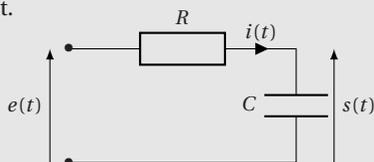
Attention, dans de rares cas, la présence de  $\underline{F}(\omega)$  peut impliquer une simplification de la fonction de transfert. Par exemple, si  $\underline{F}(\omega) = \omega_1 + j\omega$  et  $c + j\omega b + a(j\omega)^2 = (\omega_1 + j\omega)(\omega_2 + j\omega)$ , l'étude de la fonction de transfert simplifiée ne permet pas la discussion du régime transitoire.

# MÉTHODES

Retrouvez ici toutes les méthodes indispensables pour mieux appréhender les exercices et utiliser le cours.

## Méthode 1. Le filtre passe-bas du premier ordre

Considérons le filtre RC suivant.



1. Expliciter la fonction de transfert du système  $\underline{H}(\omega) = \frac{\underline{s}}{\underline{e}}$ . On note  $\omega_0 = \frac{1}{RC}$ .
2. Tracer les diagrammes de Bode du système.
3. Le signal d'entrée est un signal carré de pulsation  $\omega_1$  tel que  $\omega_1 \ll \omega_0$ . Quel est qualitativement le spectre du signal de sortie ? Quel serait-il pour  $\omega_1 > \omega_0$  ?
4. Donner l'expression de la réponse du système en fonction du signal d'entrée dans la gamme des pulsations bien plus faibles que  $\omega_0$ .
5. Justifier, à l'aide du module et de la phase de la fonction de transfert, que, pour des pulsations suffisamment élevées, ce système puisse être qualifié de filtre « intégrateur ».
6. Retrouver ces résultats en manipulant directement la fonction de transfert complexe.
7. Établir l'équation différentielle vérifiée par les signaux  $e(t)$  et  $s(t)$ .  
Retrouver la fonction de transfert.

### Application de la méthode

1. L'étude du filtrage est toujours réalisée en régime sinusoïdal forcé. Ainsi, on peut remplacer les composants par leurs impédances. De plus, on reconnaît immédiatement un pont diviseur de tension, soit :

$$\underline{s}(t) = \frac{Z_C}{Z_C + Z_R} e(t) \Rightarrow \frac{\underline{s}}{\underline{e}} = \frac{\frac{1}{jC\omega}}{\frac{1}{jC\omega} + R} \Rightarrow \boxed{\underline{H}(\omega) = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}}}$$

avec  $\omega_0 = \frac{1}{RC}$ . Cette fonction de transfert est celle d'un filtre passe-bas du premier ordre.

Tous les résultats qui suivent seront valides pour ce type de filtre, même si la réalisation électronique est différente.

2. On calcule le module et la phase de cette fonction :

$$\boxed{|\underline{H}(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}} \quad \text{et} \quad \boxed{\varphi(\omega) = -\arctan\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)}$$

On étudie le gain du système  $G_{dB}(\omega) = +20 \log |\underline{H}(\omega)|$  qui se mesure en décibel (dB). Le tracé du gain et de la phase en échelle semi-logarithmique constituent le diagramme de Bode du système.

Pour  $\omega \ll \omega_0$ , on a  $G \approx 1$ , tandis que pour  $\omega \gg \omega_0$ , on a  $\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} \approx \frac{\omega}{\omega_0}$ .

Donc  $G \approx -20 \log\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)$ , soit, par définition dans le diagramme de Bode tracé en échelle logarithmique, une pente de  $-20$  décibels par décade.

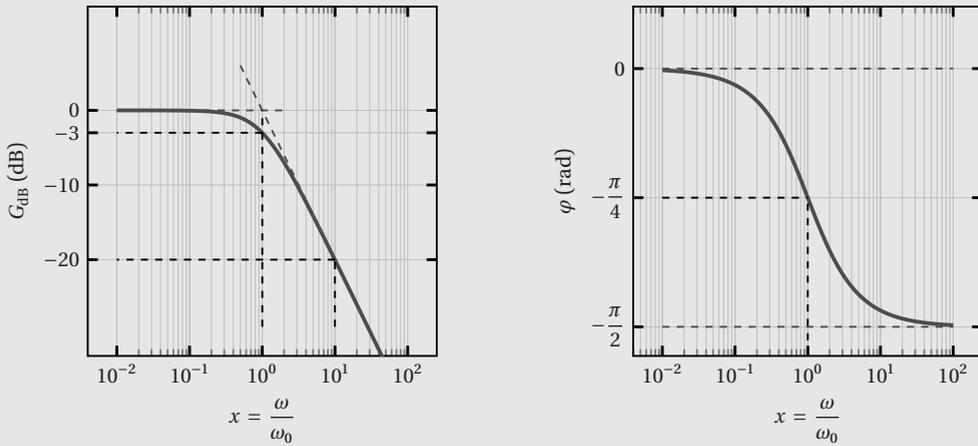


Figure 1.3. Diagramme de Bode du filtre passe-bas d'ordre 1.

3. Le signal carré possède des harmoniques impaires uniquement. Ainsi, il contient les pulsations  $\omega_1, 3\omega_1, 5\omega_1$ , etc. Pour prévoir qualitativement le résultat du filtrage, on utilise le raisonnement suivant : pour un signal carré de pulsation supérieure à  $\omega_0$ , les pulsations sont atténuées et le signal de sortie est de très faible amplitude. À l'inverse, si la pulsation fondamentale est inférieure à  $\omega_0$ , seules les harmoniques d'ordre élevé sont atténuées. Si  $\omega_1 \ll \omega_0$ , les harmoniques, et donc le signal, ne sont pas modifiées. La figure 1.4 présente le spectre avant et après filtrage.

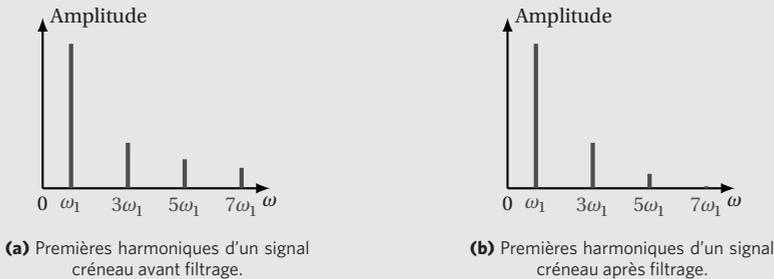


Figure 1.4. Les amplitudes des harmoniques des pulsations inférieures à  $\omega_0$  ne sont pas modifiées. Les amplitudes des harmoniques des pulsations supérieures à  $\omega_0$  sont fortement atténuées. Les pulsations intermédiaires sont faiblement atténuées mais déphasées.

4. Pour  $\omega \ll \omega_0$ , le gain du système est à peu près constant et vaut 0 dB. Il n'y a donc pas de modification de l'amplitude du signal. Il en est de même pour la phase qui est nulle. Le signal de sortie  $s(t)$  est la copie du signal d'entrée  $e(t)$ .
5. Pour  $\omega \gg \omega_0$ , on a  $\frac{\omega}{\omega_0} \gg 1$ . Dans ce cas, la phase et le module de la fonction de transfert s'approximent par  $|H(\omega)| \approx \frac{\omega_0}{\omega}$  et  $\varphi(\omega) \approx -\frac{\pi}{2}$ . En revenant au signal temporel d'entrée  $e(t) = e_0 \cos(\omega t)$ ,

on a en signal de sortie :

$$s(t) = e_0 \frac{\omega_0}{\omega} \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = e_0 \frac{\omega_0}{\omega} \sin(\omega t),$$

d'où  $\frac{ds(t)}{dt} = \omega_0 e(t)$ . Le signal de sortie correspond à la primitive du signal d'entrée à une constante près. Cela est vrai pour toutes les composantes harmoniques si  $\omega \gg \omega_0$ . Comme tous les signaux peuvent être décomposés comme une somme de fonctions harmoniques, ce filtre peut donc être qualifié de filtre intégrateur dans cette gamme de pulsation.

6. Ce résultat peut se retrouver directement. En effet, si  $\omega \gg \omega_0$ , la fonction de transfert est équivalente à :

$$\underline{H}(\omega) \approx \frac{\omega_0}{j\omega} \Rightarrow \underline{s} = \omega_0 \frac{\underline{e}}{j\omega}.$$

Or, si la dérivation est équivalente en notation complexe à une multiplication par  $j\omega$ , l'intégration correspond à une division par  $j\omega$ . Il s'agit bien d'un filtre intégrateur.

7. La loi des mailles et la loi d'Ohm impliquent que  $e(t) = Ri(t) + s(t)$ .

On sait que le courant  $i(t)$  est relié à la tension aux bornes du condensateur par la relation :

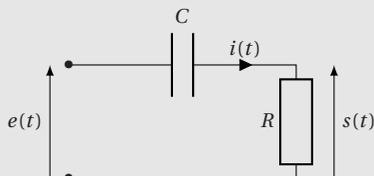
$$i(t) = C \frac{ds(t)}{dt}, \text{ d'où :}$$

$$RC \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = e(t).$$

On en déduit, en régime sinusoïdal forcé, que  $RCj\omega \underline{s}(t) + \underline{s}(t) = \underline{e}(t)$ , d'où le résultat.

## Méthode 2. Le filtre passe-haut du premier ordre

Considérons le filtre CR suivant.



1. Expliciter la fonction de transfert du système  $\underline{H}(\omega) = \frac{\underline{s}}{\underline{e}}$ . On note  $\omega_0 = \frac{1}{RC}$ .
2. Tracer les diagrammes de Bode du système.
3. Le signal d'entrée est un signal carré de pulsation  $\omega_1$  tel que  $\omega_1 \ll \omega_0$ . Quel est qualitativement le spectre du signal de sortie ? Quel serait-il pour  $\omega_1 > \omega_0$  ?
4. Donner l'expression de la réponse du système en fonction du signal d'entrée dans la gamme des pulsations bien plus grandes que  $\omega_0$ .
5. Justifier, à l'aide du module et de la phase de la fonction de transfert, que pour des pulsations suffisamment faibles, ce système puisse être qualifié de filtre « dérivateur ».
6. Retrouver ces résultats en manipulant directement la fonction de transfert complexe.
7. Établir l'équation différentielle vérifiée par les signaux  $e(t)$  et  $s(t)$ . Retrouver la fonction de transfert.

## Application de la méthode

1. L'étude du filtrage est toujours réalisée en régime sinusoïdal forcé. Ainsi, on peut remplacer les composants par leurs impédances. De plus, on reconnaît immédiatement un pont diviseur de tension, soit :

$$\underline{s}(t) = \frac{Z_R}{Z_C + Z_R} e(t) \Rightarrow \frac{s}{e} = \frac{R}{\frac{1}{jC\omega} + R} \Rightarrow \boxed{H(\omega) = \frac{j\frac{\omega}{\omega_0}}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}}},$$

avec  $\omega_0 = \frac{1}{RC}$ . Cette fonction de transfert est celle d'un filtre passe-haut du premier ordre. Tous les résultats qui suivent seront valides pour ce type de filtre, même si la réalisation électronique est différente.

2. On calcule le module et la phase de cette fonction :

$$\boxed{|H(\omega)| = \frac{\frac{\omega}{\omega_0}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}} \quad \text{et} \quad \boxed{\varphi(\omega) = \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)}.$$

On étudie le gain du système  $G_{dB}(\omega) = +20 \log |H(\omega)|$  qui se mesure en décibel (dB). Le tracé du gain et de la phase en échelle semi-logarithmique constituent le diagramme de Bode du système.

Pour  $\omega \gg \omega_0$ , on a  $G \approx 1$ , tandis que pour  $\omega \ll \omega_0$ , on a  $\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} \approx 1$ .

Donc  $G \approx 20 \log \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)$ , soit, par définition, dans le diagramme de Bode tracé en échelle logarithmique, une pente de +20 décibels par décades.

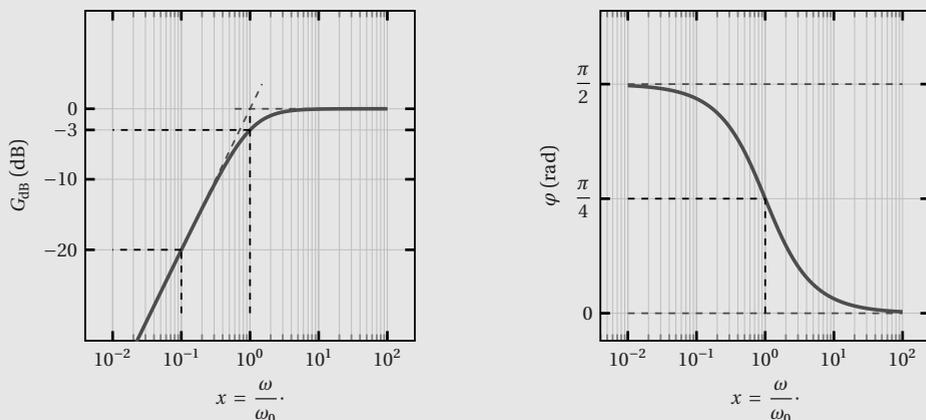
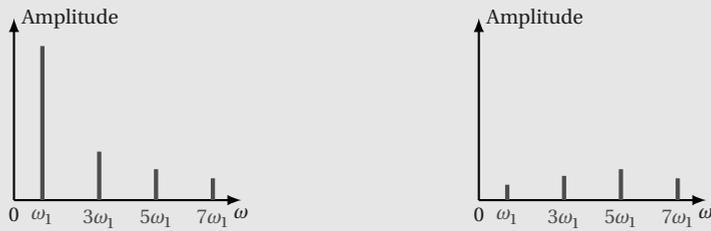


Figure 1.5. Diagramme de Bode du filtre passe-haut d'ordre 1.

3. Le signal carré possède des harmoniques impaires uniquement. Ainsi, il contient les pulsations  $\omega_1, 3\omega_1, 5\omega_1$ , etc. Pour prévoir qualitativement le résultat du filtrage, on raisonne par rapport à la pulsation propre  $\omega_0$  où les pulsations faibles devant  $\omega_0$  sont atténuées et les pulsations élevées par rapport à  $\omega_0$  restent inchangées. Les résultats sont présentés sur la figure 1.6.



(a) Premières harmoniques d'un signal crête avant filtrage. (b) Premières harmoniques d'un signal crête après filtrage.

**Figure 1.6.** Les amplitudes des harmoniques des pulsations supérieures à  $\omega_0$  ne sont pas modifiées. Les amplitudes des harmoniques des pulsations inférieures à  $\omega_0$  sont fortement atténuées. Les pulsations intermédiaires sont faiblement atténuées.

Pour un signal carré de pulsation supérieure à  $\omega_0$ , les composantes spectrales ne sont pas affectées par le filtre. Les signaux d'entrée et de sortie sont identiques sauf une valeur moyenne éventuelle qui sera coupée.

4. Pour  $\omega \gg \omega_0$ , le gain du système est à peu près constant et vaut 0 dB, il n'y a donc pas de modification de l'amplitude du signal. Il en est de même pour la phase qui est nulle. Le signal de sortie  $s(t)$  est la copie du signal d'entrée  $e(t)$  (sauf une valeur moyenne éventuelle qui sera coupée).
5. Pour  $\omega \ll \omega_0$ , on a  $\omega/\omega_0 \ll 1$ . Dans ce cas, la phase et le module de la fonction de transfert s'approximent par  $|H(\omega)| \approx \frac{\omega}{\omega_0}$  et  $\varphi(\omega) \approx \frac{\pi}{2}$ . Dans ce cas, en revenant au signal temporel d'entrée  $e(t) = e_0 \cos(\omega t)$ , on a, en signal de sortie :

$$s(t) = e_0 \frac{\omega}{\omega_0} \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = -e_0 \frac{\omega}{\omega_0} \sin(\omega t) = \frac{1}{\omega_0} \frac{de(t)}{dt}.$$

Le signal de sortie correspond à la dérivée du signal d'entrée. Cela est vrai pour toutes les composantes harmoniques si  $\omega \ll \omega_0$ . Comme tous les signaux peuvent être décomposés comme une somme de fonctions harmoniques, ce filtre peut être qualifié de filtre dérivateur dans cette gamme de pulsation.

6. Ce résultat peut se retrouver directement. En effet, si  $\omega \ll \omega_0$ , la fonction de transfert est équivalente à :

$$\underline{H}(\omega) = j \frac{\omega}{\omega_0} \quad \Rightarrow \quad \underline{s} = j \frac{\omega}{\omega_0} \underline{e}.$$

Il s'agit d'une dérivation en notations complexe, c'est donc bien un filtre dérivateur.

7. La loi des mailles implique que  $e(t) = U_C(t) + s(t)$ .  
On sait que le courant  $i(t)$  est relié à la tension aux bornes du condensateur par la relation :

$$i(t) = C \frac{du_C(t)}{dt}.$$

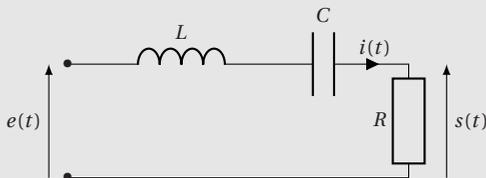
De plus, par la loi d'Ohm, on a  $s(t) = Ri(t)$ . D'où, en dérivant la loi des mailles :

$$\frac{de(t)}{dt} = \frac{s(t)}{RC} + \frac{ds(t)}{dt}.$$

On en déduit en régime sinusoïdal forcé  $RCj\omega \underline{s}(t) + \underline{s}(t) = RCj\omega \underline{e}(t)$  d'où le résultat.

### Méthode 3. Le filtre passe-bande du second ordre

Étudions la tension aux bornes d'une résistance dans un circuit  $RLC$  série.



1. Établir l'équation différentielle vérifiée par la tension aux bornes du condensateur  $s(t)$ .
2. En déduire la fonction de transfert du système  $\underline{H}(\omega) = \frac{\underline{s}}{\underline{e}}$ .
3. En utilisant les impédances complexes, retrouver ce résultat.
4. Tracer les diagrammes de Bode du filtre.
5. Ce système est-il résonant ?
6. Définir la bande passante et donner son expression à l'aide du facteur de qualité du filtre.

### Application de la méthode

1. Nous cherchons tout d'abord à trouver l'équation différentielle vérifiée par  $s(t)$ . Pour cela, nous commençons par écrire la loi des mailles  $e(t) = u_L(t) + u_C(t) + s(t)$ .

De plus, nous pouvons écrire la loi d'Ohm  $s(t) = Ri(t)$  et les relations fondamentales de la bobine

$$u_L(t) = L \frac{di(t)}{dt} = \frac{L}{R} \frac{ds(t)}{dt} \text{ et du condensateur } i(t) = C \frac{du_C(t)}{dt} = \frac{s(t)}{R}.$$

Ainsi, la loi des mailles devient  $e(t) = \frac{L}{R} \frac{ds(t)}{dt} + u_C(t) + s(t)$ . Nous dérivons cette équation et remplaçons la dérivée du  $u_C(t)$  et il vient :

$$\frac{de(t)}{dt} = \frac{L}{R} \frac{d^2s(t)}{dt^2} + \frac{ds(t)}{dt} + \frac{s(t)}{RC}.$$

2. Nous passons en notation complexe, on remplace donc la dérivée  $\frac{d}{dt}$  par une multiplication par  $j\omega$  et la dérivée seconde  $\frac{d^2}{dt^2}$  par une multiplication par  $(j\omega)^2 = -\omega^2$ . Il vient :

$$j\omega \underline{e} = -\frac{L}{R} \omega^2 \underline{s} + j\omega \underline{s} + \frac{\underline{s}}{RC} \quad \Rightarrow \quad \underline{H}(\omega) = \frac{\underline{s}}{\underline{e}} = \frac{j\omega}{\frac{1}{RC} - \omega^2 \frac{L}{R} + j\omega}.$$

Il s'agit d'un filtre d'ordre 2 car le dénominateur est un polynôme d'ordre 2 en  $j\omega$ .

Cette fonction de transfert se met sous la forme canonique :

$$\underline{H}(\omega) = \frac{H_0}{1 + jQ \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)},$$

avec  $\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$ ,  $H_0 = 1$  et  $Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$ .

3. Les impédances complexes, étudiées en première année, permettent de résoudre rapidement le problème. En effet, on remarque, en notation complexe, que nous pouvons utiliser un pont diviseur de tension :

$$\underline{H}(\omega) = \frac{s}{e} = \frac{Z_R}{Z_L + Z_R + Z_C} = \frac{R}{jL\omega + R + \frac{1}{jC\omega}} = \frac{j\omega}{\frac{1}{RC} - \omega^2 \frac{L}{R} + j\omega}$$

4. Pour  $\omega \gg \omega_0$ , il vient  $\underline{H}(\omega) \approx \frac{\omega_0}{jQ\omega}$ , soit  $G = -20 \log Q - 20 \log \left( \frac{\omega}{\omega_0} \right)$ . Il en est de même, pour  $\omega \ll \omega_0$ , il vient :  $\underline{H}(\omega) \approx \frac{\omega}{jQ\omega_0}$ , soit  $G = -20 \log Q + 20 \log \left( \frac{\omega}{\omega_0} \right)$ . Les deux asymptotes sont donc respectivement de +20, puis de -20 décibels par décade. Elles se croisent en  $\omega = \omega_0$  à la valeur  $-20 \log Q$ .

De plus, la courbe de phase est donnée par  $-\arctan \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)$ .

D'où le diagramme de Bode tracé figure 1.7.

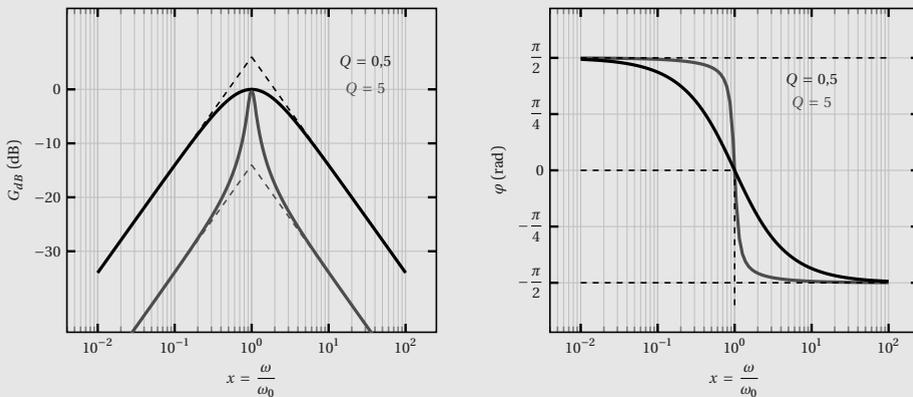


Figure 1.7. Diagramme de Bode du filtre passe-bande d'ordre 2

5. Ce système est toujours résonant car il s'agit d'un filtre passe-bande. Ainsi, le module de la fonction de transfert a toujours un maximum (voir le diagramme de Bode en gain). On peut retrouver ce résultat par le calcul. La fonction de transfert étant une fraction avec une constante au numérateur et un polynôme en  $j\omega$  au dénominateur, le gain est maximal si le module de ce polynôme atteint un minimum. De plus, la partie réelle de ce polynôme étant constante, le gain est maximal si le carré de la partie imaginaire du polynôme atteint un minimum. Il faut donc trouver le minimum de  $f(\omega) = \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2$ . Cette fonction n'est nulle que pour  $\omega = \omega_0$ . De plus, elle est toujours positive et tend vers l'infini pour les petites et grandes pulsations. Le minimum est donc en  $\omega = \omega_0$ . Ce filtre est toujours résonant, car cette pulsation existe toujours.
6. La bande passante est définie par l'ensemble des pulsations telles que  $|\underline{H}(\omega)| > \frac{|H_{\max}|}{\sqrt{2}}$  ou de façon équivalente par  $G(\omega) > G_{\max} - 3 \text{ dB}$ . On rappelle que le  $\sqrt{2}$  provient du fait que, lorsqu'on considère les grandeurs énergétiques pertinentes, il faut mettre les grandeurs physiques au carré, et donc considérer le carré de la fonction de transfert. Ainsi, la bande passante correspond aux

pulsations telles que la moitié de l'énergie possible maximale passe du signal exciteur au signal reçu. Pour la calculer, on constate que l'équation :

$$|H|(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2 \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

est équivalente à  $Q^2 \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2 = 1$ , soit les équations du second degré en :

$$\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} = \pm \frac{1}{Q} \quad \text{ou} \quad \omega^2 \pm \frac{\omega_0 \omega}{Q} - \omega_0^2 = 0.$$

Ces deux équations ont le même discriminant  $\Delta = \frac{\omega_0^2}{Q^2} + 4\omega_0^2 > 0$  et les quatre solutions sont écrites sous forme synthétiques :

$$\omega = \frac{\omega_0}{2} \left( \pm \frac{1}{Q} \pm \sqrt{\frac{1}{Q^2} + 4} \right).$$

Les solutions  $(-, -)$  et  $(+, -)$  sont toutes deux négatives, on a donc uniquement les deux solutions positives données par :

$$\omega_1 = \frac{\omega_0}{2} \left( -\frac{1}{Q} + \sqrt{\frac{1}{Q^2} + 4} \right) \quad \text{et} \quad \omega_2 = \frac{\omega_0}{2} \left( \frac{1}{Q} + \sqrt{\frac{1}{Q^2} + 4} \right).$$

Ainsi, la bande passante correspond à toutes les pulsations comprises entre  $\omega_1$  et  $\omega_2$ . La largeur de la bande passante est donnée par :

$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = \frac{\omega_0}{Q}.$$

Ainsi, plus  $Q$  est élevé, plus la bande passante est faible, autrement dit plus le filtre est sélectif. Ce résultat justifie l'appellation « facteur de qualité ».

## Méthode 4. La fonction de transfert du ressort amorti

Une masse  $m$  est suspendue verticalement à un ressort de raideur  $k$  et de longueur à vide  $\ell_0$ , fixé au plafond par une extrémité. De plus, la masse est soumise à une force de frottement fluide définie par  $-\lambda \vec{v}(t)$ , avec  $\vec{v}(t)$  le vecteur vitesse de la masse à l'instant  $t$ .

- Réaliser un schéma du problème, ainsi qu'un bilan des forces.
- Établir l'équation différentielle vérifiée par la longueur du ressort. Le système peut-il être qualifié de stable ?
- Au lieu d'accrocher le ressort au plafond, on impose un mouvement défini par la fonction  $z_e(t)$  à l'extrémité du ressort. Comment est modifiée l'équation différentielle précédente ?
- On pose la grandeur de sortie du système comme  $s(t) = z(t) - z_{\text{eq}}$  avec  $z_{\text{eq}}$  la position d'équilibre de la masse en l'absence d'excitation. En déduire la fonction de transfert du système, où l'entrée est l'oscillation  $z_e(t)$  et la sortie est la position de la masse.
- Comment choisir les valeurs des différents paramètres si l'on souhaite réaliser un amortisseur de voiture ?

## Application de la méthode

- On se place dans le référentiel terrestre supposé galiléen.

### Bilan des forces

- le poids  $\vec{P} = m\vec{g} = mg\vec{e}_z$  où  $Oz$  est vertical descendant ;
- la force de rappel du ressort  $\vec{F} = -k(\ell(t) - \ell_0)\vec{e}_z$ . Or, d'après le schéma de la figure 1.8, on a  $\ell(t) = z(t)$  donc  $\vec{F} = -k(z(t) - \ell_0)\vec{e}_z$  ;
- la force de frottement fluide de l'air sur la masse  $\vec{F}_f = -\lambda \vec{v}(t)$ .

**2. Seconde loi de Newton**

En notant  $\vec{a}$  le vecteur accélération de la masse, il vient :

$$m \vec{a} = mg \vec{e}_z - k(z(t) - \ell_0) \vec{e}_z - \lambda \vec{v} .$$

Dans le système de coordonnées choisi, on a :  $\vec{a} = \ddot{z}(t) \vec{e}_z$  et  $\vec{v} = \dot{z}(t) \vec{e}_z$ .

Ainsi, en projetant le principe fondamental de la dynamique, il vient :

$$\ddot{z}(t) + \frac{\lambda}{m} \dot{z}(t) + \frac{k}{m} z(t) = g + \frac{k \ell_0}{m} .$$

Tous les coefficients de l'équation différentielle sans second membre sont de même signe, le système est donc stable.

3. Notons  $z_e(t)$  l'altitude du plafond qui varie avec le temps. La longueur du ressort est maintenant  $z(t) - z_e(t)$ . La force devient donc :  $\vec{F} = -k(z(t) - z_e(t) - \ell_0) \vec{e}_z$ . Ainsi, l'équation différentielle devient :

$$\ddot{z}(t) + \frac{\lambda}{m} \dot{z}(t) + \frac{k}{m} z(t) = g + \frac{k \ell_0}{m} + \ddot{z}_e(t) .$$

4. La position d'équilibre du système se trouve pour  $z_e(t) = 0$ ,  $\dot{z}(t) = 0$  et  $\ddot{z}(t) = 0$ . Ainsi, on trouve  $z_{eq} = \frac{mg}{k} + \ell_0$ . On pose  $s(t) = z(t) - z_{eq}$  et on constate que  $\dot{s}(t) = \dot{z}(t)$  et  $\ddot{s}(t) = \ddot{z}(t)$ . L'équation différentielle devient donc :

$$\ddot{s}(t) + \frac{\lambda}{m} \dot{s}(t) + \frac{k}{m} s(t) = z_e(t) ,$$

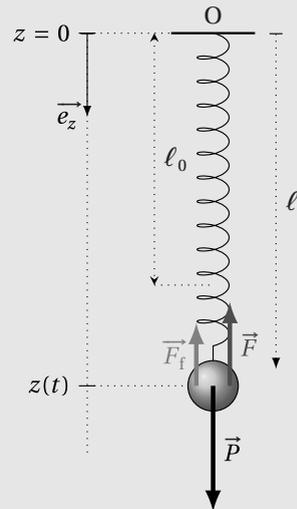
que l'on traite en régime sinusoïdal forcé, soit :

$$(j\omega)^2 \underline{s} + j\omega \frac{\lambda}{m} \underline{s} + \frac{k}{m} \underline{s} = \underline{z}_e .$$

On en déduit donc la fonction de transfert :

$$\underline{H}(\omega) = \frac{\underline{s}}{\underline{z}_e} = \frac{1}{\frac{k}{m} - \omega^2 + j\omega \frac{\lambda}{m}} .$$

5. Il s'agit d'un oscillateur amorti de pulsation propre  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ . Le coefficient devant la dérivée d'ordre 1 vaut  $\frac{\omega_0}{Q} = \frac{\lambda}{m}$  et on en déduit  $Q = \frac{\sqrt{km}}{\lambda}$ . Si  $Q < \frac{1}{2}$ , le régime transitoire est toujours exponentiellement amorti, ce qui limite fortement le désagrément. Cela conduit notamment au choix d'un fluide très visqueux couplé à un ressort assez rigide. On remarque que  $Q < \frac{1}{2} < \frac{1}{\sqrt{2}}$ , il n'y a donc pas non plus de fréquence de résonance, ce qui est également favorable. En réalité, sur les voitures, on essaye d'avoir un temps de réponse court, donc de se rapprocher de  $Q = \frac{1}{2}$ . Pour minimiser encore le temps de réponse, on tend parfois vers  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  (même s'il y a un dépassement, c'est la valeur de  $Q$  qui assure le temps de réponse à 5% le plus court).



**Figure 1.8.** Schéma du problème du système masse-ressort vertical en tenant compte de la force de frottements fluide. L'origine des  $z$  est prise au niveau du plafond.

## Méthode 5. Stabilité d'un système mécanique

Un anneau de masse  $m$  est disposé sur une tige métallique. À l'instant  $t = 0$ , la tige se met à tourner à la vitesse angulaire constante  $\Omega$ . On note  $l(t)$  la position de l'anneau sur la tige à un instant  $t$ . Initialement, l'anneau est à la position  $l_0$  et n'a pas de vitesse initiale.

Dans le référentiel de la tige, on suppose que la seule force subie par l'anneau est la force centrifuge, ou non galiléenne d'entraînement, donnée par  $\vec{f} = m\Omega^2 l(t)\vec{e}_r$ . On admet que, dans ce cas, le vecteur accélération vaut  $\vec{a} = \dot{l}(t)\vec{e}_r$ .

1. Quelle est l'équation différentielle vérifiée par  $l(t)$  ?
2. Le système est-il stable ? Pourquoi ?
3. Que vaut  $l(t)$  ?

## Application de la méthode

1. On se place dans le référentiel de la tige. La seconde loi de Newton indique que  $m\vec{a} = \vec{f}$ . Ainsi, en projetant sur  $\vec{e}_r$ , il vient l'équation différentielle  $\ddot{l}(t) - \Omega^2 l(t) = 0$ .
2. Les coefficients de l'équation différentielle d'ordre deux sont de signes différents, le système est donc instable. C'est l'effet de la force centrifuge qui tend à éjecter la masse.
3. Les solutions de cette équation sont de la forme  $l(t) = Ae^{-\Omega t} + Be^{+\Omega t}$ . Les conditions initiales imposent  $A + B = l_0$ , pour la position, et  $A - B = 0$ , pour la vitesse, soit  $A = B = \frac{l_0}{2}$ . Au final, il

vient  $l(t) = l_0 \cosh(\Omega t)$ . On a  $\lim_{t \rightarrow +\infty} l(t) = +\infty$ , la solution diverge, le système est bien instable.

Le modèle n'est plus pertinent lorsque la masse arrive au bout de la tige. En la quittant, elle ne sera plus soumise à la force centrifuge. Elle est donc éjectée avec une grande vitesse. C'est le principe d'une fronde.

### Remarque

Mathématiquement, il est possible de choisir  $l_0 = 0$ . Dans ce cas, il semble n'y avoir pas de mouvement. Toutefois, d'un point de vue physique, la masse n'étant pas ponctuelle et des vibrations étant présentes, il est impossible d'avoir rigoureusement cette condition. En faisant une étude énergétique, on peut montrer en effet que  $l_0 = 0$  est un point d'équilibre instable. Le système est toujours instable, quelle que soit la condition initiale.

# ENTRAÎNEMENTS

## Exercices d'entraînement

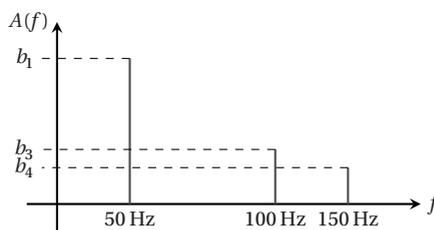
### EXERCICE 1 Concevoir un filtre

●○○ 5 min.

On souhaite filtrer un signal dont le spectre de Fourier est connu et représenté sur la figure ci-contre.

On voudrait pouvoir conserver en sortie de filtre un signal aussi sinusoïdal que possible, de fréquence comprise entre 75 Hz et 200 Hz.

Vaut-il mieux chercher à obtenir un signal de fréquence 100 ou 150 Hz ? Quel type de filtre choisiriez vous ?

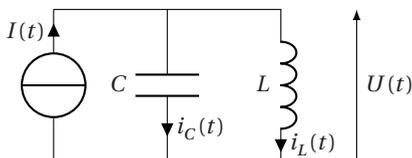


### EXERCICE 2 Stabilité du système $LC$ parallèle

●○○ 15 min.

Considérons le courant traversant une inductance dans un circuit  $LC$  parallèle. Initialement, le courant est nul.

1. Donner l'équation différentielle vérifiée par le courant  $i_L(t)$ , puis la fonction de transfert  $\underline{H}(\omega) = \frac{i_L}{I}$ .  
Ce système est-il stable ?
2. Quel est l'ordre de ce filtre ? Décrire les asymptotes du diagramme de Bode en amplitude.

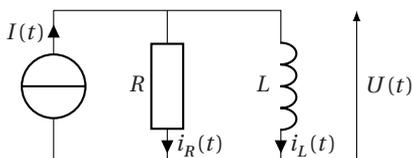


### EXERCICE 3 Le circuit $RL$ parallèle

●○○ 15 min.

Considérons le courant traversant une inductance dans un circuit  $RL$ . Initialement, le courant est nul.

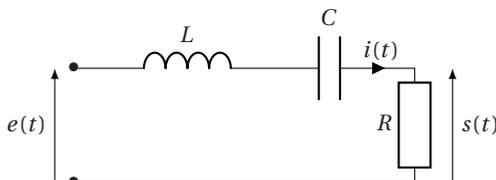
1. Donner l'équation différentielle vérifiée par le courant  $i_L(t)$ , puis la fonction de transfert  $\underline{H}(\omega) = \frac{i_L}{I}$ .  
Ce système est-il stable ?
2. Quel est l'ordre de ce filtre ? Décrire les asymptotes du diagramme de Bode en amplitude.



### EXERCICE 4 Résonance en courant dans le circuit $RLC$ série

●●○ 30 min.

On étudie la tension aux bornes de la résistance dans le circuit  $RLC$  série.



1. Donner l'équation différentielle vérifiée par la tension  $s(t)$ . Le système est-il stable ?
2. En déduire la fonction de transfert du système  $\underline{H}(\omega) = \frac{s}{e}$ .
3. Une résonance a-t-elle lieu ? Si oui, à quelle pulsation ? Est-ce que cette pulsation de résonance est la même que celle qui se produit lorsque l'on observe la tension aux bornes du condensateur ?

### EXERCICE 5 Filtre ADSL

●●● 30 min.

Les signaux transmis par une ligne téléphonique utilisent une large gamme de fréquence : de 0 à 4 kHz, pour les signaux téléphoniques (transmettant la voix), et de 25 kHz à 2 MHz, pour les signaux informatiques (internet).

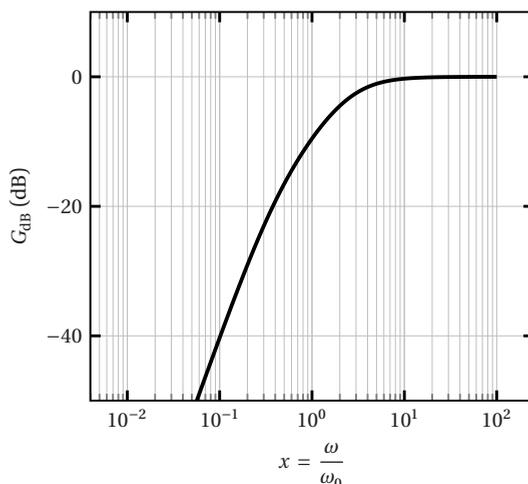
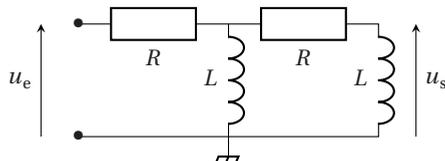
1. Quel type de filtre faut-il choisir si l'on ne souhaite récupérer que les signaux téléphoniques ? Que les signaux informatiques ? Quelle fréquence de coupure peut-on choisir ?

2. On utilise le filtre ci-dessous. Déterminer la fonction de transfert de ce filtre et la mettre sous la forme :

$$\underline{H} = \frac{-x^2}{1 + 3jx - x^2},$$

avec  $x = \frac{\omega}{\omega_0}$ , où  $\omega_0$  est à déterminer.

3. On donne le diagramme de Bode en amplitude ci-dessous. Commentez les valeurs asymptotiques en hautes et basses fréquences du filtre.  
 4. Quelles valeurs d'inductance et de résistance faut-il choisir pour réaliser le filtre souhaité?



**EXERCICE 6 Modélisation d'une suspension de véhicule en régime forcé (extrait de CCP TSI)**

●●○ 30 min.

Un véhicule à vide (masse suspendue) est assimilé à une masse  $m$ .

On suppose que la suspension est constituée d'un ressort de masse négligeable, de raideur  $k$  et de longueur au repos  $l_0$ , et d'un dispositif d'amortissement.

Dans ce problème, on ne s'intéresse qu'au mouvement de translation verticale du véhicule. La position du véhicule est repérée par sa coordonnée  $z(t)$ , l'axe  $Oz$  étant vertical, orienté vers le haut et muni d'un vecteur unitaire  $\vec{u}_z$ .  $z(t)$ , représente la coordonnée de l'extrémité supérieure du ressort. À l'équilibre, en l'absence de tout mouvement vertical, la position du véhicule sera repérée par sa coordonnée  $z_e$  d'équilibre.

Le véhicule se déplace sur un sol non plat à la vitesse horizontale constante  $v_1$ . La position verticale du point bas de la suspension (roue) est repérée par la variable  $z_s(t)$ . Par hypothèse, la roue est considérée comme ponctuelle et reste à tout instant en contact avec le sol.

Le module d'amortissement visqueux est modélisé par une force de frottement fluide  $-h\vec{v}$ , où  $\vec{v}$  représente la vitesse relative des deux extrémités de l'amortisseur. On a donc  $\vec{F} = -h(\dot{z}(t) - \dot{z}_s(t))\vec{u}_z$ .

1. Quelle est l'unité de  $h$  dans le système international?
2. Déterminer l'expression de la force exercée par le ressort de la suspension sur la masse  $m$  en fonction de  $k$ ,  $z(t)$ ,  $z_s(t)$ ,  $l_0$  et du vecteur unitaire  $\vec{u}_z$ .
3. Faire le bilan des forces auxquelles le véhicule est soumis lorsqu'il est hors équilibre. On détaillera clairement chaque force en indiquant sa direction, son sens et sa norme.

RAPPELS DE COURS

MÉTHODES

ENTRAÎNEMENTS CORRIGÉS

- En appliquant le principe d'inertie (première loi de Newton), écrire la relation entre ces différentes forces lorsque le véhicule est à l'équilibre. En déduire l'expression de la cote  $z_{\text{eq}}$  à l'équilibre en fonction de  $m$ ,  $g$ ,  $k$  et  $l_0$ .
- En appliquant la relation fondamentale de la dynamique, déterminer l'équation différentielle reliant les fonctions  $z(t)$  et  $z_s(t)$  et leurs dérivées temporelles, ainsi que les paramètres  $h$ ,  $m$ ,  $k$  et  $z_{\text{eq}}$  (où  $z_{\text{eq}}$  représente la position de l'équilibre statique).
- À partir de l'étude de l'équation différentielle, montrer que la fonction de transfert du système est de la forme :

$$\underline{H}(\omega) = \frac{Z_m}{Z_s} = \frac{1 + j\frac{\omega}{Q\omega_0}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + j\frac{\omega}{Q\omega_0}} .$$

On exprimera  $\omega_0$  et  $Q$  en fonction des données du problème.

## CORRIGÉS

### EXERCICE 1

On doit forcément couper la fréquence à 50 Hz. Or, ce pic est très élevé, on préférera donc utiliser un passe-haut pour couper le mieux possible cette harmonique. On essaiera donc de garder le 150 Hz pour pouvoir avoir une coupure la plus efficace du 50 Hz. Il faudra aussi couper le 100 Hz, donc prendre une fréquence de coupure autour de 125 Hz.

### EXERCICE 2

- Recherchons tout d'abord l'équation différentielle sur le courant  $i_L(t)$ . La loi des nœuds implique  $I(t) = i_C(t) + i_L(t)$ . Or, les relations aux bornes de l'inductance et du condensateur impliquent  $U(t) = \frac{q_C(t)}{C} = L \frac{di_L(t)}{dt}$ , sachant que  $i_C(t) = \frac{dq_C(t)}{dt}$ . Dans ce cas, l'équation différentielle est :

$$\frac{d^2 i_L(t)}{dt^2} + \frac{1}{LC} i_L(t) = \frac{1}{LC} I(t) .$$

Il n'y a pas de coefficients négatifs dans l'équation différentielle, le système est stable. La fonction de transfert correspondante vaut :

$$\underline{H}(\omega) = \frac{i_L}{I} = \frac{1}{1 - \omega^2 LC} .$$

- Pour  $\omega = 0$ , on a  $\underline{H} = 1$ , et, pour  $\omega \gg \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ , on a  $\underline{H} \approx 0$ . Il s'agit donc d'un filtre passe-bas d'ordre deux. L'ordre se déduit de la puissance deux présente en  $\omega$  au dénominateur.

À basse fréquence, l'asymptote est horizontale  $G_{\text{dB}} = 0$ . Pour les hautes fréquences, on a  $\underline{H} \approx \frac{1}{-LC\omega^2}$ , soit  $G_{\text{dB}} = 20 \log |\underline{H}| \approx -20 \log LC - 40 \log \omega$ . L'asymptote est donc une droite de  $-40$  dB par décade.

**EXERCICE 3**

1. La loi des nœuds implique  $I(t) = i_R(t) + i_L(t)$ . Or, la loi courant-tension de l'inductance et la loi des mailles implique  $U(t) = Ri_R(t) = L \frac{di_L(t)}{dt}$ . Dans ce cas, l'équation différentielle est :

$$\frac{L}{R} \frac{di_L(t)}{dt} + i_L(t) = I(t),$$

et la fonction de transfert :

$$\underline{H}(\omega) = \frac{i_L}{I} = \frac{1}{1 + j\frac{L}{R}\omega}.$$

Le coefficient  $\alpha = \frac{R}{L}$  est positif, le système est stable.

2. On reconnaît immédiatement la fonction de transfert du passe-bas d'ordre un (voir la section Méthodes de ce chapitre pour une discussion détaillée).

**EXERCICE 4**

1. On utilise la loi des mailles  $e(t) = s(t) + u_L(t) + u_C(t)$ . On a la loi d'Ohm  $s(t) = Ri(t)$  et les relations des dipôles  $u_L(t) = L \frac{di}{dt} = \frac{L}{R} \frac{ds(t)}{dt}$  et  $\frac{du_C(t)}{dt} = \frac{1}{C} \frac{dq_C(t)}{dt} = \frac{1}{RC} s(t)$ . D'où, en dérivant la loi des mailles :

$$\frac{de(t)}{dt} = \frac{L}{R} \frac{d^2s(t)}{dt^2} + \frac{ds(t)}{dt} + \frac{1}{RC} s(t).$$

Tous les coefficients de l'équation différentielle homogène sont positifs, le système est stable.

2. On utilise alors la représentation complexe et les dérivées temporelles deviennent une multiplication par  $j\omega$  et il vient :

$$\underline{H}(\omega) = \frac{j\omega}{1 - \omega^2 LC + jRC\omega} = \frac{1}{\frac{1}{j\omega} + j\omega LC + RC}.$$

3. Il y a une résonance si le module de la fonction de transfert est maximal pour une certaine pulsation  $\omega_r$ , autrement dit si le module du dénominateur  $-\frac{j}{\omega} + j\omega LC + RC$  est minimal. Le coefficient  $RC$  étant constant, le module du dénominateur est minimal si le carré de sa partie imaginaire est minimale. Un carré est toujours positif ou nul. En outre, le carré de la partie imaginaire s'annule effectivement pour  $\omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ .

Il y a donc bien une résonance. Cette existence était en réalité évidente car ce système est un filtre passe-bande, dont la fonction de transfert présente toujours un maximum et on remarque que  $\omega_r = \omega_0$ .

Si l'on observe la tension aux bornes du condensateur, on obtient la fonction de transfert à l'aide d'un diviseur de tension :

$$\underline{H}_2(\omega) = \frac{1}{R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega}} = \frac{1}{1 - LC\omega^2 + jRC\omega}.$$

La fonction de transfert étant différente, on peut montrer par le calcul que la pulsation de résonance l'est aussi et vaut  $\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$ , avec  $Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$  le facteur de qualité. Le phénomène de résonance n'a

lieu que si  $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$ .

### EXERCICE 5

1. Pour le son, il faut un filtre passe-bas de fréquence de coupure à environ 10 kHz. Pour internet, il faut un filtre passe-bande ou passe-haut de bande passante commençant à 10 kHz au minimum.
2. On note  $V_L$  la tension intermédiaire sur la première bobine. On oriente tous les courants vers le nœud et on exprime la loi des nœuds en terme de potentiels et en fonction des impédances :

$$\frac{V_L - U_e}{R} + \frac{V_L - 0}{jL\omega} + \frac{V_L - U_s}{R} = 0,$$

d'où :

$$\underline{V}_L = \frac{\frac{U_e}{R} + \frac{U_s}{R}}{\frac{2}{R} + \frac{1}{jL\omega}} = \frac{U_e + U_s}{2 + \frac{R}{jL\omega}}.$$

On fait ensuite un pont diviseur au bornes de la seconde inductance :

$$\underline{U}_s = \frac{jL\omega}{R + jL\omega} \underline{V}_L = \frac{jL\omega}{R + jL\omega} \frac{U_e + U_s}{2 + \frac{R}{jL\omega}}.$$

D'où :

$$\begin{aligned} \underline{U}_s(R + jL\omega) \left( 2 + \frac{R}{jL\omega} \right) - jL\omega \underline{U}_s &= jL\omega \underline{U}_e, \\ \underline{U}_s \left( 3R + jL\omega + \frac{R^2}{jL\omega} \right) &= jL\omega \underline{U}_e, \\ \underline{U}_s (R^2 + 3RjL\omega - L^2\omega^2) &= -L^2\omega^2 \underline{U}_e. \end{aligned}$$

On pose  $x = \frac{L\omega}{R}$  pour trouver la fonction de transfert demandée.

3. Pour de basses fréquences,  $x \ll 1$  et  $\underline{H} \sim -x^2$ . Pour de hautes fréquences,  $x \gg 1$  et  $\underline{H} \sim 1$ . Il s'agit d'un filtre passe-haut d'ordre 2 : on a d'abord une pente de +40dB/dec aux basses fréquences, puis une asymptote horizontale.
4. Pour  $x = 1$ ,  $|H| = \frac{1}{3}$ , nous ne sommes pas loin de la fréquence de coupure. C'est pourquoi, on prend  $\frac{R}{L} \approx 1 \times 10^4 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ . Cela permet d'avoir le filtre ADSL recherché.

### EXERCICE 6

1. Comme  $h\vec{v}$  est une force, elle s'exprime en Newton, soit en  $\text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$ . Ainsi,  $h$  s'exprime en  $\text{kg} \cdot \text{s}^{-1}$ .
2. On constate, avec les notations, que la longueur du ressort vaut  $l(t) = z(t) - z_s(t)$ , ainsi la force du ressort s'exprime  $\vec{F} = -k(z(t) - z_s(t) - l_0)\vec{u}_z$ .
3. Il y a trois forces : le poids,  $\vec{P} = -mg\vec{u}_z$ , la force de rappel du ressort et la force de frottement.
4. À l'équilibre, la somme des forces est nulle et la force de frottement l'est également, car la vitesse est nulle. De plus, à l'équilibre,  $z_s = 0$ . Il vient  $\vec{0} = \vec{F} + \vec{P}$ , soit en projetant  $-k(z(t) - z_s(t) - l_0) - mg = 0$ , donc  $z_{\text{eq}} = \frac{l_0 - mg}{k}$ .
5. On applique le principe fondamental de la dynamique, que l'on projette sur l'axe  $\vec{e}_z$ . Il vient alors :

$$m\ddot{z}(t) + h\dot{z}(t) + kz(t) = z_{\text{eq}} + h\dot{z}_s(t) + kz_s(t).$$

6. En remplaçant les dérivées temporelles par  $j\omega$ , on trouve la relation demandée avec  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$  et  $Q = \frac{\sqrt{mk}}{h}$ .

# CHAPITRE 2

## Amplificateurs linéaires intégrés et rétroaction

### Objectifs et compétences du programme

Capacités principales à maîtriser	Méthodes associées	Exercices associés
Identifier le régime linéaire ou saturé d'un ALL.	Toutes	Tous
Établir une relation entrée/sortie dans le cas linéaire.	1, 3, 5 et 6	1 à 3 et 5 à 8
Établir une relation entrée/sortie dans le cas saturé.	2 et 4	4 et 5

## RAPPELS DE COURS

### 1. Impédances d'entrée et de sortie

En électronique de commande, on modélise les éléments par des blocs qui réalisent des opérations bien définies (filtrage, amplification de tension ou de courant, multiplication, intégration, dérivation...). Le comportement de chaque bloc ne doit pas être influencé par les blocs voisins.

Un bloc peut se définir à l'aide d'une fonction de transfert  $\underline{H}$  et surtout d'impédances d'entrée et de sortie. L'impédance d'entrée correspond à ce que le montage amont ressent électriquement de la présence du bloc, tandis que celle de sortie aura une influence sur ce que le montage aval ressent.

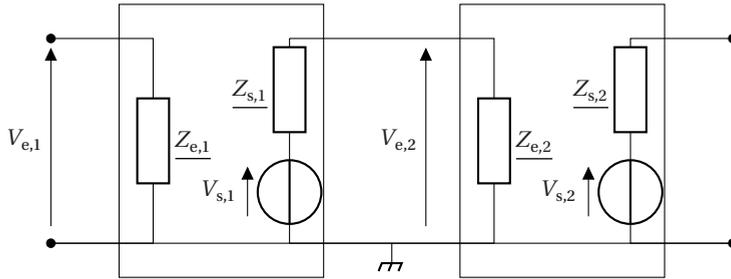
Par exemple, la résistance de sortie d'un Générateur Basse Fréquence (GBF) vaut  $50 \Omega$  alors que la résistance d'entrée d'un multimètre vaut environ  $10 \text{ M}\Omega$  et celle d'un oscilloscope  $1 \text{ M}\Omega$ . De plus, bien souvent, des capacités sont aussi à prendre en compte dans les impédances d'entrée, celle de l'oscilloscope valant typiquement quelques picofarads. L'influence de ces résistances a été étudié en première année.

Considérons les blocs modélisés dans la figure 2.1 présente en page suivante.  $\underline{Z}_e$  et  $\underline{Z}_s$  sont respectivement les impédances d'entrée et de sortie des blocs. En utilisant un pont diviseur de tension, on remarque que la tension d'entrée du second bloc vaut :

$$\underline{V}_{e,2} = \frac{\underline{Z}_{e,2}}{\underline{Z}_{e,2} + \underline{Z}_{s,1}} \underline{V}_{s,1}.$$

Autrement dit, la tension à l'entrée du second bloc est influencée par l'impédance de sortie du premier bloc. Pour s'affranchir de ce problème, on doit avoir  $|\underline{Z}_{e,2}| \gg |\underline{Z}_{s,1}|$ . Cette condition est indispensable pour traiter l'électronique par blocs.

Dans ce cas, et uniquement dans ce cas, si  $\underline{V}_{s,1} = \underline{H}_1 \underline{V}_{e,1}$  et  $\underline{V}_{s,2} = \underline{H}_2 \underline{V}_{e,2}$ , alors  $\underline{V}_{s,2} = \underline{H}_1 \underline{H}_2 \underline{V}_{e,1}$ . L'intérêt de l'amplificateur linéaire intégré que nous étudions dans la suite du chapitre est de permettre cette condition.



**Figure 2.1.** Impédances d'entrée et de sortie de quadripôles électroniques. Le fil inférieur représente le fil de masse du système.

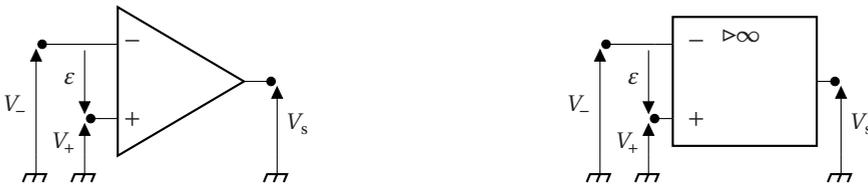
## 2. L'amplificateur linéaire intégré (ALI)

### 2.1. Présentation

L'amplificateur linéaire intégré (ou amplificateur opérationnel) est un **composant actif**. Autrement dit, il doit être alimenté électriquement pour fonctionner et peut fournir de l'énergie au système. Cette alimentation électrique ne fait pas partie explicitement du montage électrique mais ne doit pas être oubliée, tout comme les alimentations des GBF ou des oscilloscopes par exemple.

L'ALI est modélisé par un bloc à trois connexions :

- une entrée  $V_+$ , dite « non-inverseuse » ;
- une entrée  $V_-$ , dite « inverseuse » ;
- une sortie  $V_s$ .



**Figure 2.2.** Schématisations de l'ALI.

La modélisation complète de l'ALI intégré :

- les courants de polarisations  $i_+$  et  $i_-$ , représentant l'intensité des courants entrant dans chacune des entrées;
- l'intensité du courant de sortie  $i_s$ ;
- $R_e$  la résistance d'entrée différentielle de l'ALI, représentant la résistance entre les bornes + et - ;
- $R_s$  la résistance de sortie de l'ALI, représentant la résistance interne d'un générateur de tension équivalent à la sortie.

### 2.2. Modélisation du premier ordre de l'ALI idéal

#### 2.2.1. Modèle de l'ALI idéal

La modélisation de l'ALI idéal contient :

- **une résistance d'entrée  $R_e$  infinie.** Ainsi, **les courants d'entrée sont nuls**, soit :

$$i_+ = 0 \quad \text{et} \quad i_- = 0 ;$$

- une **résistance de sortie**  $R_s$  nulle.
- l'**existence d'un régime linéaire** pour lequel  $V_s(\omega) = \underline{H}(\omega)\underline{\varepsilon}(\omega)$ , où  $\underline{H}(\omega)$  est la fonction de transfert d'un filtre passe-bas du premier ordre et où l'on note la différence de potentiel entre les deux entrées :

$$\varepsilon = V_+ - V_- ;$$

- l'**existence d'un régime saturé en tension** pour lequel la tension de sortie  $V_s$  est constante.
- pour chaque ALI il existe un **courant de saturation**  $i_{\text{sat}}$  en sortie. Typiquement, pour les ALI utilisés en TP, ce courant est de l'ordre de quelques dizaines de mA;

### 2.2.2. Caractéristique statique

De la modélisation qui précède, on peut déduire la caractéristique statique, en régime continu, de l'ALI, tracée figure 2.3. On constate trois régimes de fonctionnement :

- un **régime linéaire** pour lequel  $V_s = A_0\varepsilon$  lorsque  $|\varepsilon| < \frac{V_{\text{sat}}}{A_0}$  ;
- un **régime saturé positivement** pour lequel  $V_s = +V_{\text{sat}}$  lorsque  $\varepsilon > \frac{V_{\text{sat}}}{A_0}$  ;
- un **régime saturé négativement** pour lequel  $V_s = -V_{\text{sat}}$  lorsque  $\varepsilon < -\frac{V_{\text{sat}}}{A_0}$ .

L'ordre de grandeur de la tension de saturation est le même que la tension d'alimentation continue. Par ailleurs, le gain statique de l'ALI  $A_0$  est très élevé, de l'ordre de  $10^5$ . Le changement de régime a donc lieu pour  $\varepsilon = \frac{V_{\text{sat}}}{A_0} \approx \pm 0,1 \text{ mV}$ .

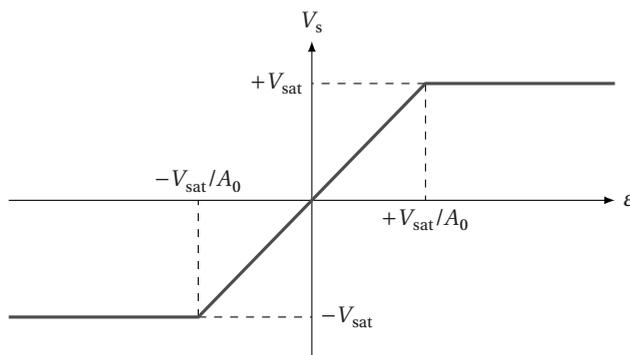


Figure 2.3. Caractéristique statique de l'ALI.

### 2.2.3. Fonction de transfert en régime linéaire

Lorsque le régime linéaire est atteint, autrement dit, si le module de  $\varepsilon$  reste inférieur à 0,1 mV, il est possible d'étudier le comportement fréquentiel de l'ALI. Dans ce cas, celui-ci est modélisé par un filtre passe-bas du premier ordre, donc :

$$\underline{H}(\omega) = \frac{V_s}{\underline{\varepsilon}} = \frac{A_0}{1 + j\frac{\omega}{\omega_c}}$$

avec  $\omega_c \approx 100 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ . Cela conduit à une fréquence de coupure de l'ordre de 10 Hz, ce qui correspond à un filtre à très basse fréquence. Autrement dit, si nous revenons à une équation différentielle du premier ordre, la durée du régime transitoire en cas de changement de la tension d'entrée est de l'ordre de 0,1 s, ce qui est bien trop élevé pour traiter un signal électronique.

### 3. Le modèle de l'ALI idéal de gain infini

Les exemples du comparateur à hystérésis et de l'amplificateur non inverseur traités dans la section Méthodes de ce chapitre permettent de mettre en avant deux régimes de fonctionnement de l'ALI lorsque celui-ci a une rétroaction unique :

- positive, le régime transitoire est instable et l'ALI fonctionne en régime saturé;
- négative, le régime transitoire est stable et l'ALI peut fonctionner en régime linéaire. Par ailleurs, on trouve que  $V_+ \approx V_-$  et on a égalité si on considère le gain infini.

De plus, lorsque l'ALI n'a pas de rétroaction, la gamme possible pour le régime linéaire est très faible, de l'ordre de 0,1 mV. Au vu des dispositifs électroniques utilisés, le bruit ambiant sera bien souvent de cet ordre de grandeur. Le régime linéaire sans rétroaction est impossible à atteindre.

Ainsi, la caractéristique statique de l'ALI représentée figure 2.3 peut être modélisée différemment. En effet, tout se passe comme si  $A_0 = +\infty$ , car le régime linéaire n'est atteint que pour  $\varepsilon \approx 0$ . Dans ce cas, la caractéristique de l'ALI est tracée en figure 2.4.

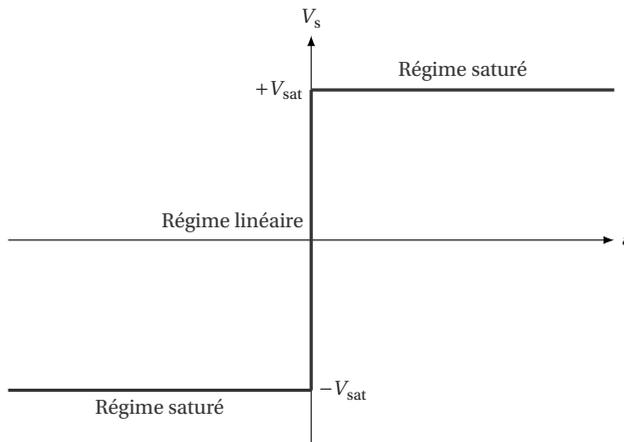


Figure 2.4. Caractéristique statique idéale de l'ALI.

#### Propriété 2.1. Modèle de l'ALI idéal et de gain infini

Un ALI idéal est modélisé par :

- **une résistance d'entrée  $R_e$  infinie.** Ainsi, **les courants d'entrée sont nuls**, soit :

$$i_+ = 0 \quad \text{et} \quad i_- = 0 ;$$

- **une résistance de sortie  $R_s$  nulle;**
- **en cas de rétroaction unique de la sortie sur l'entrée négative de l'ALI,** le régime linéaire est possible et, dans ce cas :

$$\varepsilon = V_+ - V_- = 0 ;$$

- **en cas de rétroaction unique de la sortie sur l'entrée positive de l'ALI ou s'il n'y a pas de rétroaction,** le régime saturé est atteint et :

$$V_s = +V_{\text{sat}} \text{ si } \varepsilon > 0 \quad \text{et} \quad V_s = -V_{\text{sat}} \text{ si } \varepsilon < 0 .$$

Avec ce modèle, la fonction de transfert de l'ALI n'est plus nécessaire pour traiter ce composant électronique. Avec ces quatre hypothèses, on peut traiter totalement n'importe quel problème. On retiendra le graphique de la figure 2.5 pour se souvenir du choix du régime saturé ou linéaire d'un ALI idéal.

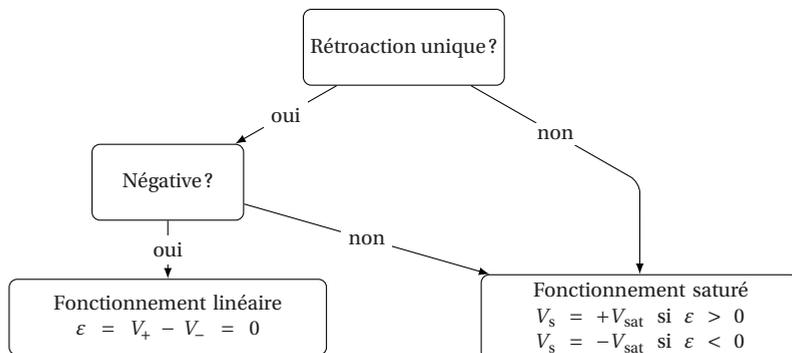
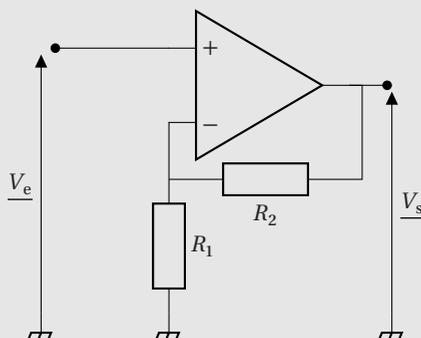


Figure 2.5. Représentation schématique du choix du régime de fonctionnement d'un ALI idéal de gain infini.

## MÉTHODES

Retrouvez ici toutes les méthodes indispensables pour mieux appréhender les exercices et utiliser le cours.

### Méthode 1. Le montage amplificateur non-inverseur



### Étude de la stabilité du montage

On étudie le montage ci-dessus.

1. Rappeler l'expression de la fonction de transfert  $\underline{H}(\omega)$  de l'ALI et donner les ordres de grandeur des différents termes introduits.
2. Donner la relation entre la tension de sortie et la tension d'entrée à l'aide de la fonction de transfert  $\underline{H}(\omega)$ . On posera  $G = \frac{R_1}{R_1 + R_2}$ .
3. En déduire la relation complexe entre les tensions  $\underline{V}_s$  et  $\underline{V}_e$ . Quelle est la nature de cette relation?
4. Discuter alors la stabilité du montage.

## Étude avec l'ALI idéal et de gain infini

On suppose maintenant que l'ALI est idéal et de gain infini.

5. Quel est le régime de fonctionnement de l'ALI?
6. En déduire la fonction de transfert  $\underline{H} = \frac{V_s}{V_e}$  du montage.
7. L'impédance d'entrée d'un montage est le rapport entre la tension d'entrée  $V_e$  et le courant d'entrée. Exprimer l'impédance d'entrée de ce montage.

## Application de la méthode

### Étude de la stabilité du montage

1. Voir cours.
2. Dans ce circuit, la tension d'entrée  $V_e$  est directement la tension  $V_+$ . Supposons que le régime linéaire est atteint. Dans ce cas, on a, par définition :

$$\underline{V}_s = \underline{H}(\omega)\underline{\varepsilon} = \underline{H}(\omega) (\underline{V}_e - \underline{V}_-)$$

Utilisons le fait que les courants de polarisation de l'ALI sont nuls. Dans ce cas, la tension  $V_-$  est directement donnée par un pont diviseur de tension.

On a donc  $\underline{V}_- = G\underline{V}_s$ , avec  $G = \frac{R_1}{R_1 + R_2}$ . Dans ce cas, la relation précédente devient :

$$\underline{V}_s = \underline{H}(\omega)\underline{V}_e - \underline{H}(\omega)G\underline{V}_s$$

Donc :

$$\underline{V}_s = \frac{\underline{H}(\omega)}{1 + \underline{H}(\omega)G} \underline{V}_e$$

3. Cette relation devient :

$$\underline{V}_s = \frac{A_0}{1 + GA_0 + j\frac{\omega}{\omega_0}} \underline{V}_e \approx \frac{1}{G} \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{GA_0\omega_0}} \underline{V}_e, \quad (2.1)$$

où nous avons utilisé le fait que  $A_0 \approx 10^5 \gg 1$ , donc naturellement supposé que  $G \gg \frac{1}{A_0}$ .

Avec l'équation (2.1), on constate que l'amplificateur non inverseur se comporte comme un filtre passe-bas, de bande passante donnée par  $\omega_c = GA_0\omega_0$ . Cette pulsation est très élevée, pour des valeurs raisonnables de  $G$ . Ainsi, pour des pulsations inférieures à  $\omega_c$ , la fonction de transfert est équivalente à  $\frac{1}{G}$ .

4. Cette fois, en suivant le même raisonnement qu'à la question précédente, la contribution du régime libre au régime transitoire du système sera une exponentielle décroissante de la forme  $V_{s,h}(t) = Ce^{-t/\tau}$ , avec  $\tau = \frac{1}{A_0\omega_0G} \approx 10^{-7}$  s et  $C$  une constante. De façon quasiment instantanée,

ce régime transitoire va être nul si le signal d'entrée a une fréquence faible devant  $\frac{1}{\tau} = 10^7$  Hz, ce qui est quasiment toujours le cas en électronique.

Le régime forcé de ce système est donc donné par  $\underline{V}_e = G\underline{V}_s$ . De plus, grâce au pont diviseur de tension, on a toujours  $\underline{V}_- = G\underline{V}_s = \underline{V}_e = \underline{V}_+$ .

On constate donc que, grâce à la rétroaction négative, dans le cas d'un gain infini, de façon quasi-instantanée, le système trouve un équilibre pour  $\varepsilon = 0$ . On peut généraliser ce résultat à la propriété suivante.

**Propriété 2.2. Rétroaction négative unique**

En cas de rétroaction unique de la tension de sortie sur l'entrée - d'un l'ALI idéal et de gain infini, celui-ci est en régime linéaire et, dans ce cas,  $\varepsilon = 0$ .

**Remarque**

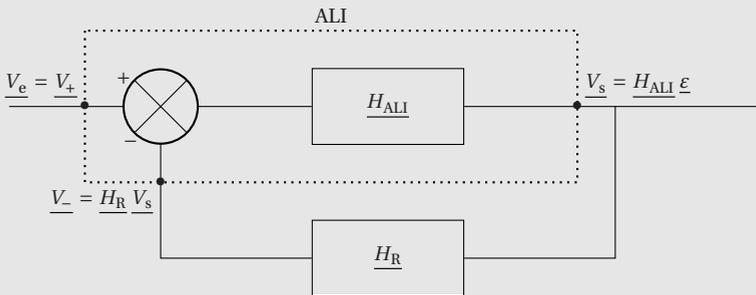
La stabilité est immédiate à partir de l'équation en utilisant les résultats du chapitre précédent sur la stabilité des systèmes linéaires.

► **Produit gain-bande passante**

Remarquons que le gain de l'ALI seul vaut  $A_0$  et sa bande passante  $\omega_0$ . Dans le cas de l'amplificateur non inverseur, le gain vaut  $\frac{1}{G}$  et la bande passante  $GA_0\omega_0$ . Ainsi, on remarque que, dans ce cas, le produit gain-bande passante est une constante valant  $A_0\omega_0$ . Pour obtenir un amplificateur non inverseur, il est donc nécessaire de trouver un compromis, qui peut être soit une forte bande passante, soit une grande amplification.

► **Schéma bloc équivalent**

Ce résultat peut être modélisé de façon générale par un schéma bloc fonctionnel, identique à ceux vus en Sciences industrielles de l'ingénieur.



**Figure 2.6.** Schéma bloc équivalent à un ALI avec une chaîne de retour  $H_R$  branchée sur une rétroaction négative, fonctionnant ainsi en régime linéaire.

Le schéma bloc est représenté figure 2.6. Le bloc de l'ALI impose  $V_s = H_{ALI}(V_+ - V_-)$ . La rétroaction dans la chaîne de retour impose  $V_- = H_R V_s$ . Finalement, on a :

$$V_s = \frac{H_{ALI}}{1 + \frac{H_{ALI}}{H_R}} V_s$$

Dans le cas de l'amplificateur non inverseur, on a  $H_R = G$ . On retrouve bien les résultats précédents. Dans le cas général, si le bloc retour ne contient que des dipôles passifs, cette opération stabilise le système linéaire.

### Étude avec l'ALI idéal et de gain infini

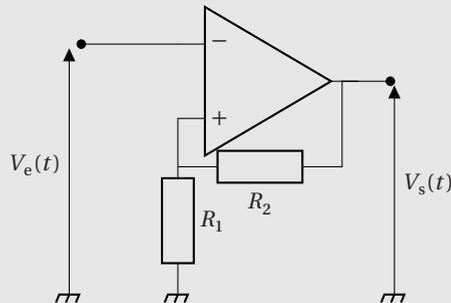
- Il y a une rétroaction unique entre la sortie et l'entrée négative de l'ALI, celui-ci est donc en régime linéaire.
- Dans le régime linéaire, on a  $V_+ = V_-$ . Or,  $V_+ = V_e$ , on retrouve donc la tension d'entrée aux bornes de la résistance  $R_1$ . Par ailleurs, dans le régime linéaire, les courants d'entrée sont nuls, ainsi aucun courant n'arrive sur l'entrée négative de l'ALI. Par conséquent, on peut appliquer un pont diviseur de tension qui donne :

$$\underline{V_e} = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \underline{V_s}, \quad \text{d'où} \quad \boxed{\underline{H}(\omega) = \frac{R_2}{R_1} + 1}.$$

Ce résultat justifie le nom du montage. La tension d'entrée est amplifiée d'un facteur positif et supérieur à 1.

- Le courant d'entrée est nul (borne d'entrée de l'ALI), l'impédance d'entrée du montage global est donc infinie.

### Méthode 2. Le comparateur à hystérésis



### Étude de la stabilité du montage

On étudie le montage de la figure ci-dessus.

- Quelle est la différence avec le montage de la méthode 1 de l'amplificateur non inverseur ?
- Rappeler l'expression de la fonction de transfert  $\underline{H}(\omega)$  de l'ALI et indiquer les ordres de grandeurs des différents termes introduits.
- Donner la relation entre la tension de sortie et la tension d'entrée à l'aide de la fonction de transfert

$$\underline{H}(\omega). \text{ On posera } G = \frac{R_1}{R_1 + R_2}.$$

- En déduire la relation complexe entre les tensions  $\underline{V_s}$  et  $\underline{V_e}$ .
- Discuter alors la stabilité du montage.

### Cas de l'ALI idéal et de gain infini

On suppose maintenant que l'ALI est idéal et de gain infini.

- Quel est le régime de fonctionnement de l'ALI ?
- Notons  $V_{\text{sat}}$  la tension de saturation de l'ALI. Supposons que la tension d'entrée soit initialement inférieure à  $-\frac{R_1}{R_1 + R_2} V_{\text{sat}}$ . Que vaut alors la tension de sortie  $V_s$  ?
- La tension d'entrée initialement à la valeur de la question précédente est progressivement augmentée. Comment évolue la tension de sortie ?
- Une fois que la tension d'entrée a dépassé la valeur  $V_0 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} V_{\text{sat}}$ , on inverse le processus et on la diminue progressivement. Comment évolue la tension de sortie ?
- Tracer sur un même graphique le cycle de fonctionnement du système. Définir le phénomène d'hystérésis.

## Application de la méthode

### Étude de la stabilité du montage

1. Par rapport au montage précédent, la rétroaction se fait sur la borne + de l'ALI au lieu de la borne -.
2. Voir cours.
3. Dans ce circuit, la tension d'entrée  $V_e$  est directement la tension  $V_-$ . Supposons que le régime linéaire est atteint. Dans ce cas, on a :

$$\underline{V_s} = \underline{H}(\omega)\underline{\varepsilon} = \underline{H}(\omega) (\underline{V_+} - \underline{V_e}) .$$

Utilisons le fait que les courants de polarisation de l'ALI sont nuls. Dans ce cas, la tension  $V_+$  est directement donnée par un pont diviseur de tension. On a donc  $V_+ = G V_s$ , avec  $G = \frac{R_1}{R_1 + R_2}$ .

Dans ce cas, la relation précédente devient :

$$\underline{V_s} = \underline{H}(\omega)G \underline{V_s} - \underline{H}(\omega) \underline{V_e} .$$

Donc :

$$\underline{V_s} = \frac{-\underline{H}(\omega)}{1 - \underline{H}(\omega)G} \underline{V_e} .$$

4. En revenant à la définition de  $\underline{H}(\omega)$ , il vient :

$$\underline{V_s} = \frac{-A_0}{1 - GA_0 + j\frac{\omega}{\omega_0}} \underline{V_e} \approx \frac{1}{G - j\frac{\omega}{A_0\omega_0}} \underline{V_e} , \quad (2.2)$$

où nous avons utilisé le fait que  $A_0 \approx 10^5 \gg 1$ , donc naturellement supposé que  $G \gg \frac{1}{A_0}$ .

5. Revenons à la représentation temporelle en retrouvant l'équation différentielle. Il vient :

$$\frac{1}{A_0\omega_0} \frac{dV_s(t)}{dt} - G V_s(t) = -V_e(t) .$$

La solution homogène de cette équation différentielle est  $V_{s,h}(t) = C e^{t/\tau}$ , avec  $\tau = \frac{1}{A_0\omega_0 G}$  et  $C$ , une constante. Quelle que soit la solution particulière de cette équation différentielle et quelles que soient les conditions initiales, cette solution homogène va croître de façon exponentielle. Comme  $\frac{1}{A_0\omega_0} \approx 10^{-7}$  s, cette croissance exponentielle aura un temps caractéristique très faible.

#### Remarque

Même avec des conditions initiales supposées nulles, la divergence aura lieu. En effet, la nullité absolue est impossible en électronique, à cause du bruit électrique ambiant.

Ainsi, quasiment instantanément, la tension de sortie  $V_s$  est égale à la tension de saturation. Le régime linéaire est instable. On peut généraliser ce résultat à la propriété suivante.

#### Propriété 2.3. Rétroaction positive unique

En cas de rétroaction unique de la tension de sortie sur l'entrée + de l'ALI, celui-ci fonctionne en régime saturé.

#### Remarque

L'instabilité est immédiate à partir de l'équation (2.2) en utilisant les résultats du chapitre précédent sur la stabilité des systèmes linéaires.

## Cas de l'ALI idéal et de gain infini

6. Il n'y a pas de rétroaction sur l'entrée négative de l'ALI, celui-ci est donc en régime saturé.
7. Nous avons  $\varepsilon(t) = V_+(t) - V_-(t)$  et  $V_-(t) = V_e(t)$ . Avec un pont diviseur de tension (car  $i_+ = 0$ ), on trouve  $V_+(t) = \frac{R_1}{R_1 + R_2} V_s(t)$ . Nous n'utiliserons pas les notations complexes, car le montage ne fonctionne pas en régime linéaire.
- On rappelle que pour l'ALI en régime saturé, on a le fonctionnement suivant : si  $\varepsilon > 0$ ,  $V_s = +V_{sat}$  et si  $\varepsilon < 0$ ,  $V_s = -V_{sat}$ . Ainsi, initialement :

$$\varepsilon = \frac{R_1}{R_1 + R_2} V_s - V_e > \frac{R_1}{R_1 + R_2} (V_s + V_{sat}) > 0 .$$

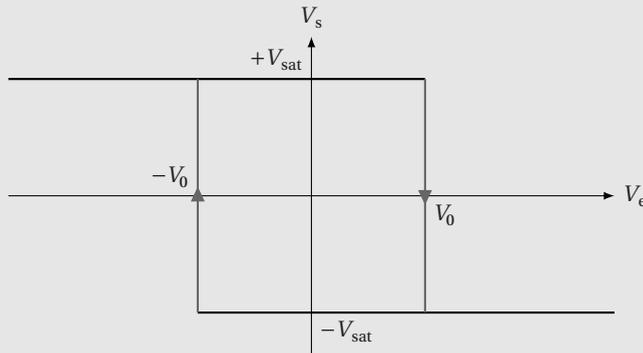
Quelle que soit la valeur de  $V_s = \pm V_{sat}$ ,  $\varepsilon$  est positive. Ainsi, on en déduit que  $V_s = +V_{sat}$ .

8. Initialement, on a  $\varepsilon = \frac{R_1}{R_1 + R_2} V_{sat} - V_e > 0$ . On augmente progressivement  $V_e$  jusqu'à ce que  $\varepsilon$  devienne négatif. La bascule se fait pour  $\varepsilon = 0$ , soit  $V_0 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} V_{sat}$ . Ainsi, pour  $V_e > V_0$ , on a  $V_s = -V_{sat}$ .
9. On a maintenant  $V_s = -V_{sat}$ . Reprenons la définition de  $\varepsilon$ , qui est initialement négatif. On a :

$$\varepsilon = -\frac{R_1}{R_1 + R_2} V_{sat} - V_e .$$

En diminuant progressivement  $V_e$ ,  $\varepsilon$  change de signe pour  $V_e = -\frac{R_1}{R_1 + R_2} V_{sat} = -V_0$ . Ainsi, pour  $V_e < -V_0$ , on a  $V_s = +V_{sat}$ .

10. Le sens des flèches de la figure 2.7 indique le sens de parcours du cycle. La bascule ne se fait pas pour la même tension selon l'état initial de la tension de sortie. Lorsque le système se trouve sur l'une des branches noires de la courbe, la tension de sortie reste constante.



**Figure 2.7.** Cycle du comparateur à hystérésis.

Appuyons nous sur le cycle figure 2.7. Si l'on alimente le comparateur avec une tension d'entrée inférieure à  $-V_0$ , la tension de sortie vaut  $+V_{sat}$ . Si on augmente la tension d'entrée jusqu'à une tension  $V_1$  inférieure à  $+V_0$ , la tension de sortie vaut toujours  $+V_{sat}$ . On augmente à nouveau la tension d'entrée pour dépasser  $V_0$ , que l'on diminue pour retrouver la tension  $V_1$ . Cette fois, la tension de sortie vaut  $-V_{sat}$ . Pour une même tension d'entrée, la valeur de la tension de sortie est différente selon l'histoire du système.

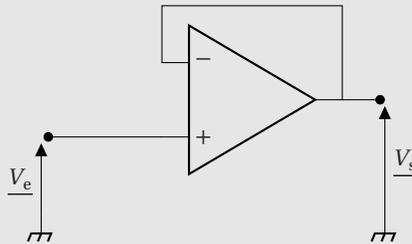


### Définition 2.4. Hystérésis

L'**hystérésis** (ou hystérèse) est la propriété d'un système dont l'évolution ne suit pas le même chemin selon qu'une cause extérieure augmente ou diminue.

Autrement dit, l'état du système dépend de son histoire passée. Ce phénomène justifie le nom de ce système. Dans les circuits types que nous étudions, il ne peut y avoir d'hystérésis que dans le cas du régime saturé avec rétroaction de la sortie sur l'entrée positive de l'ALI. L'un des intérêts du comparateur à hystérésis par rapport au comparateur simple réside dans sa plus grande immunité au bruit : une fois qu'il a commuté, la tension de seuil change franchement et empêche une commutation due à des parasites.

### Méthode 3. Le montage suiveur



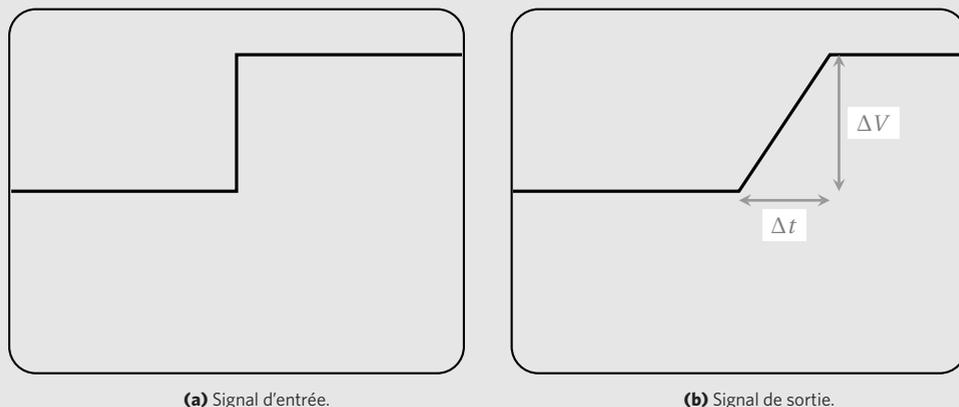
1. Le montage ci-dessus est étudié en supposant l'ALI idéal et de gain infini. Quelle est la relation entre les tensions d'entrée et de sortie ?
2. Quel peut être l'intérêt d'un tel montage ?
3. Un ALI ne peut pas passer instantanément d'une valeur à une autre, il met un certain temps. Proposer une méthode pour mettre en évidence ce phénomène appelé « slew-rate » de l'ALI.

### Application de la méthode

1. L'ALI possède une unique rétroaction négative, il est donc en régime linéaire. Par ailleurs,  $V_+ = V_-$ , donc  $V_e = V_s$ . La fonction de transfert du montage vaut donc  $H(\omega) = 1$ .  
Ce montage permet ainsi de réaliser une copie du signal d'entrée. Ce montage permet de découpler deux circuits électronique grâce à son impédance d'entrée infini et sa résistance de sortie nulle. Un suiveur isole électriquement deux parties d'un circuit électrique.
2. Dans le premier paragraphe du cours, nous avons mis en évidence l'importance des impédances d'entrée et de sortie des montages. Lorsque les impédances des quadripôles ne vérifient pas les propriétés demandées, le montage suiveur permet de les rétablir.
3. Le « slew-rate » est une limitation intrinsèque des ALI. L'établissement de la tension de sortie ne peut pas dépasser une certaine vitesse  $SR = \left| \frac{dv_s}{dt} \right|_{\max}$ . Cette valeur est typiquement de l'ordre de  $0,5 \text{ V} \cdot \mu\text{s}^{-1}$  pour les ALI utilisés en TP (741).

Pour mettre facilement ce phénomène en évidence, il faut réaliser un montage dont la sortie doit varier sur une grande amplitude dans un intervalle de temps très court. Par exemple, en utilisant un suiveur pour suivre la marche d'un signal créneau de grande amplitude, comme cela est indiqué en figure 2.8.

Lorsque l'on observe un signal sinusoïdal, cet effet apparaît en suivant un signal de grande amplitude variant rapidement. Le « slew-rate » a alors tendance à « triangulariser » le signal.

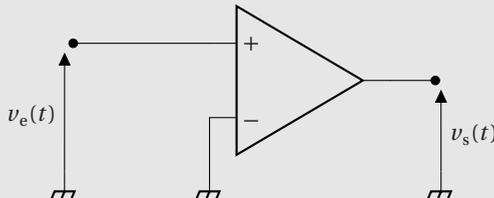


**Figure 2.8.** Visualisation du phénomène de « slew-rate » sur un écran d'oscilloscope.

$$\text{On a } \frac{\Delta V}{\Delta t} = \text{SR}.$$

### Méthode 4. Le comparateur simple

On considère un ALI idéal et de gain infini branché comme ceci :



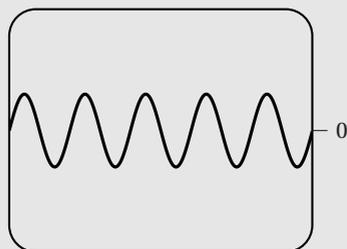
1. Décrire la tension de sortie en fonction de la tension d'entrée.
2. Quel sera l'effet d'un tel montage sur un signal sinusoïdal ?

### Application de la méthode

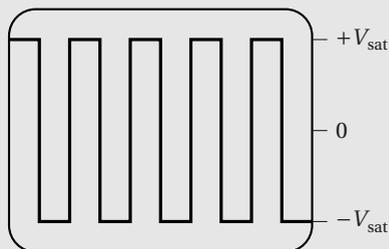
1. Il n'y a pas de rétroaction, l'ALI est donc en régime saturé. Par ailleurs, comme l'entrée négative est reliée à la masse, on a  $v_+(t) = v_-(t) = v_e(t)$ . Ainsi, le signal de sortie vaut  $+V_{\text{sat}}$ , lorsque le signal d'entrée est positif, et  $-V_{\text{sat}}$ , lorsqu'il est négatif.
2. Dans le cas du circuit du comparateur simple, un tel dispositif peut servir de générateur de fonction créneau. Si le signal d'entrée est un signal sinusoïdal de fréquence  $f_0$ , alors le signal de sortie est un créneau qui possède une infinité d'harmoniques.

**La génération d'harmoniques est l'une des caractéristiques des systèmes non linéaires**, illustrée sur cet exemple figure 2.9.

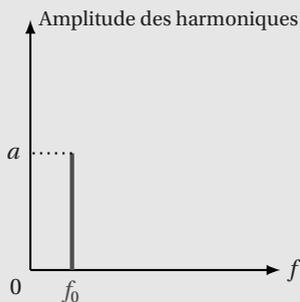
Dans tous les exemples déjà traités, un signal de pulsation donnée en entrée du système donnait une réponse de même pulsation. Il s'agit d'une caractéristique essentielle des systèmes linéaires. Pour les systèmes non linéaires, la situation n'est pas la même. En effet, un système non linéaire est un système pour lequel la réponse à une somme de signaux est différente de la somme des réponses des signaux pris séparément. Le principe de superposition ne s'applique pas.



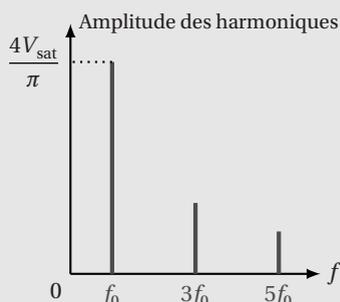
(a) Visualisation à l'oscilloscope du signal d'entrée.



(b) Visualisation à l'oscilloscope du signal de sortie créneau.



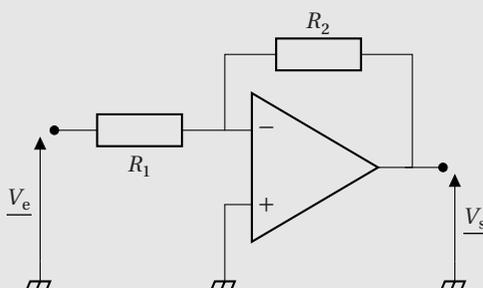
(c) Spectre du signal d'entrée sinusoïdal.



(d) Spectre du signal créneau. De nouvelles harmoniques sont présentes.

**Figure 2.9.** Visualisation de l'effet d'un comparateur simple sur un signal sinusoïdal. Le spectre du signal de sortie est beaucoup plus riche que le spectre du signal d'entrée. La génération d'harmoniques est l'une des caractéristiques des systèmes non linéaires.

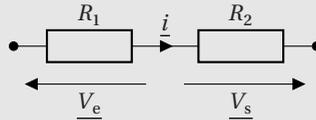
### Méthode 5. Le montage amplificateur inverseur



1. Quel est le régime de fonctionnement de l'ALI supposé idéal et de gain infini ?
2. En déduire la fonction de transfert  $H = \frac{V_s}{V_e}$  du montage.
3. L'impédance d'entrée d'un montage est le rapport entre la tension d'entrée  $V_e$  et le courant d'entrée. Exprimer l'impédance d'entrée de ce montage.

## Application de la méthode

1. Il y a une rétroaction unique entre la sortie et l'entrée négative de l'ALI, celui-ci est donc en régime linéaire.
2. Dans le régime linéaire, on a  $V_+ = V_-$ . Or,  $V_+ = 0$ , car l'entrée positive est reliée à la masse. Ainsi, la tension  $V_e$  se retrouve aux bornes de la première résistance et la tension  $V_s$  aux bornes de la seconde résistance. Par ailleurs, dans le régime linéaire, les courants d'entrées sont nuls. Ainsi, aucun courant n'arrive sur l'entrée négative de l'ALI. Par conséquent, les résistances sont parcourues par le même courant  $\underline{i}$ . Le circuit est équivalent au circuit ci-dessous.



On utilise ensuite les impédances des dipôles et la loi d'Ohm, il vient :

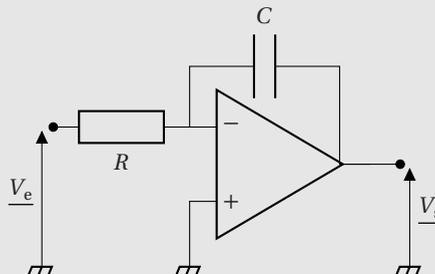
$$\underline{i} = \frac{V_e}{R_1} = -\frac{V_s}{R_2}, \quad \text{d'où} \quad \boxed{\underline{H}(\omega) = -\frac{R_2}{R_1}}.$$

Le signe moins provient de la convention. En effet, la loi d'Ohm s'applique en convention récepteur, alors que la résistance  $R_2$  est en convention générateur sur le circuit.

Ce résultat justifie le nom du montage. La tension d'entrée est amplifiée d'un facteur négatif, ce qui inverse le signal.

3. Le courant d'entrée est cette fois non nul car seul le courant d'entrée entrant dans l'ALI est nul. La tension d'entrée est aux bornes de la résistance  $R_1$  et le courant d'entrée la traverse. L'impédance d'entrée est donc  $R_1$ .

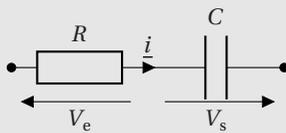
## Méthode 6. Le montage intégrateur



1. Quel est le régime de fonctionnement de l'ALI?
2. En déduire la fonction de transfert  $\underline{H} = \frac{V_s}{V_e}$  du montage.
3. Justifier la dénomination « montage intégrateur inverseur ».
4. L'impédance d'entrée d'un montage est le rapport entre la tension d'entrée  $V_e$  et le courant d'entrée. Exprimer l'impédance d'entrée de ce montage.

## Application de la méthode

1. Il y a une rétroaction unique entre la sortie et l'entrée négative de l'ALI, celui-ci est donc en régime linéaire.
2. Dans le régime linéaire, on a  $V_+ = V_-$ . Or,  $V_+ = 0$ , car l'entrée positive est reliée à la masse. Ainsi, la tension  $V_e$  se retrouve aux bornes de la résistance et la tension  $V_s$  se trouve aux bornes du condensateur. Par ailleurs, dans le régime linéaire, les courants d'entrées sont nuls. Ainsi, aucun courant n'arrive sur l'entrée négative de l'ALI. Par conséquent, la résistance et le condensateur sont parcourus par le même courant  $i$ . Le circuit est équivalent au circuit ci-dessous.



On utilise ensuite les impédances des dipôles et on a :

$$\underline{i} = \frac{V_e}{R} = -jC\omega V_s, \quad \text{d'où} \quad \boxed{H(\omega) = -\frac{1}{jRC\omega}}$$

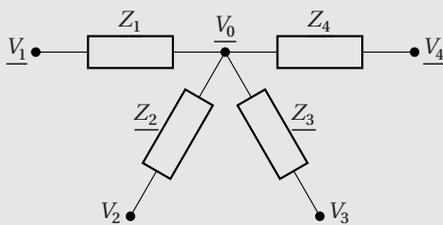
Le signe moins provient de la convention. En effet, la loi d'Ohm s'applique en convention récepteur, alors que le condensateur  $C$  est en convention générateur sur le circuit.

3. On a  $V_e = -jRC\omega V_s$ . En repassant en temporel, on a  $V_e(t) = -RC \frac{dV_s(t)}{dt}$ . La tension de sortie est l'intégrale, à une constante près, de la tension d'entrée, d'où la dénomination du montage. Pour s'affranchir du signe négatif, on peut utiliser ensuite un montage amplificateur inverseur (voir la méthode précédente).

Le montage intégrateur vu précédemment sans ALI n'est valide que pour une certaine gamme de fréquence. L'ALI permet *a priori* de s'affranchir de cette contrainte.

4. Le courant d'entrée est cette fois non nul car seul le courant d'entrée entrant dans l'ALI est nul. La tension d'entrée est aux bornes de la résistance  $R$  et le courant d'entrée la traverse. L'impédance d'entrée est donc  $R$ .

## Méthode 7. Loi des nœuds en termes de potentiels



Les potentiels affichés correspondent aux tensions par rapport à la masse du circuit.

1. Montrer le résultat suivant, appelé *loi des nœuds en termes de potentiels* :

$$\sum_{k=1}^4 \frac{V_0 - V_k}{Z_k} = 0.$$

2. En déduire le théorème de Millman (hors programme) :

$$\underline{V}_0 = \frac{\sum_{k=1}^4 \frac{V_k}{Z_k}}{\sum_{k=1}^4 \frac{1}{Z_k}}$$

### Application de la méthode

1. Dans chaque terme de la somme, d'après la loi d'Ohm en régime sinusoïdal forcé aux bornes de l'impédance  $Z_k$ , on reconnaît l'amplitude complexe de l'intensité qui parcourt la branche  $k$ , en ayant orienté ce courant depuis le nœud 0 vers le nœud  $k$ .  
Il s'agit donc seulement d'une version, en régime sinusoïdal forcé, de la loi des nœuds.

**Remarque**

Cette version de la loi des nœuds se révèle extrêmement utile pour mettre en équation les circuits électroniques et déterminer des fonctions de transfert notamment.

2. On isole  $\underline{V}_0$  dans l'expression précédente : 
$$\underline{V}_0 \sum_{k=1}^4 \frac{1}{Z_k} - \sum_{k=1}^4 \frac{V_k}{Z_k} = 0,$$
 d'où le résultat.

Ce théorème peut être utile en électronique. Il est étudié dans le programme d'électricité du cours de Sciences industrielles de l'ingénieur. En Physique, il n'est pas au programme, son utilisation nécessite donc de reproduire les étapes de démonstration explicitées ci-dessus.

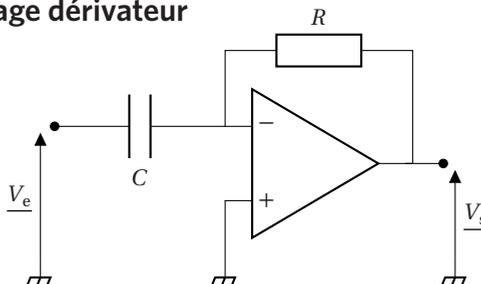
Ce théorème se généralise à un nombre quelconque de dipôles.

# ENTRAÎNEMENTS

## Exercices d'entraînement

### EXERCICE 1 Le montage dérivateur

●○○ 15 min.



1. Quel est le régime de fonctionnement de l'ALI supposé idéal et de gain infini ?
2. En déduire la fonction de transfert  $\underline{H} = \frac{V_s}{V_e}$  du montage.
3. Justifier la dénomination « montage dérivateur inverseur ».
4. L'impédance d'entrée d'un montage est le rapport entre la tension d'entrée  $\underline{V}_e$  et le courant d'entrée. Exprimer l'impédance d'entrée de ce montage.

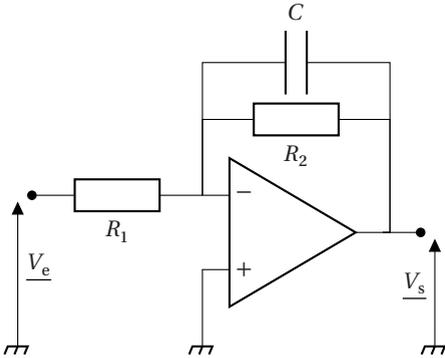
### EXERCICE 2 Montages à ALI dans le régime linéaire

●○○ 20 min.

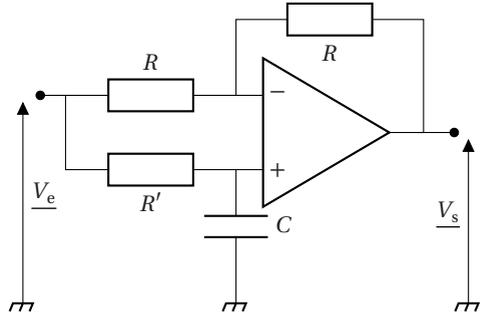
Pour chacun des montages :

1. Justifier que l'ALI supposé idéal et de gain infini fonctionne en régime linéaire.
2. Donner la fonction de transfert du montage.
3. Donner la relation, éventuellement sous forme d'une équation différentielle, entre le signal d'entrée  $e(t)$  et celui de sortie  $s(t)$ .
4. Préciser l'intérêt du dispositif.

### Montage pseudo-intégrateur



### Montage déphaseur

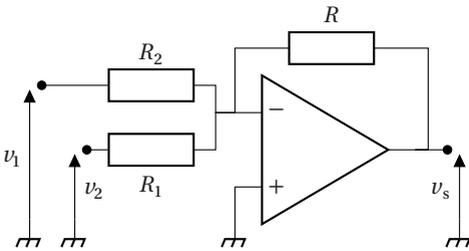


### EXERCICE 3 Montages à opérations algébriques élémentaires

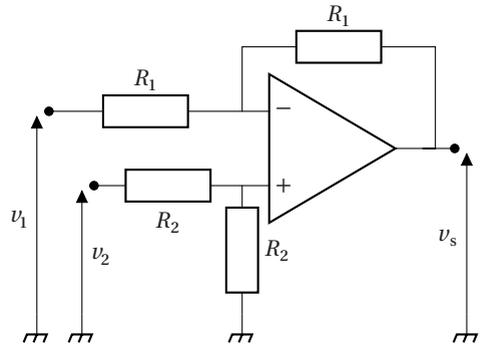
●●○ 30 min.

Pour les deux montages ci-dessous, déterminer la relation entre  $v_s$ ,  $v_1$  et  $v_2$ . Les ALI sont supposés idéaux et de gain infini.

1.



2.



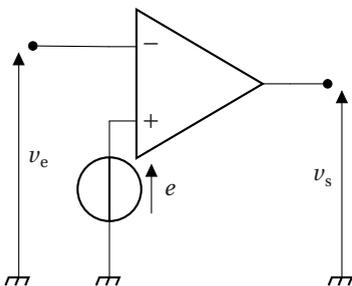
### EXERCICE 4 Deux comparateurs simples

●●○ 20 min.

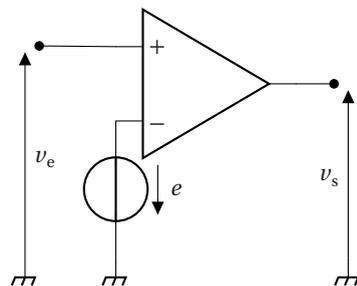
Les ALI sont supposés idéaux et de gain infini. Pour chacun des montages :

1. Quel est le régime de fonctionnement de l'ALI? Est-ce qu'un phénomène d'hystérésis est présent?
2. Exprimer la tension différentielle  $\varepsilon$  en fonction de  $v_s$  et  $v_e$ .
3. Tracer la courbe de fonctionnement du comparateur.

(a)



(b)



RAPPELS DE COURS

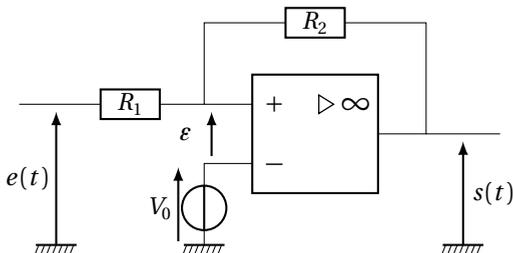
MÉTHODES

ENTRAÎNEMENTS CORRIGÉS

**EXERCICE 5 Un comparateur à hystérésis**

●●○ 20 min.

On étudie le montage de la figure ci-dessous. Les tensions de saturation de l'ALI sont notées  $\pm V_{sat}$ .

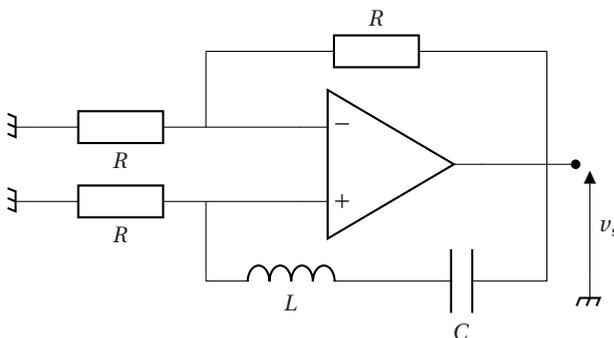


1. En supposant que l'ALI se comporte comme un système d'ordre 1, de constante de temps  $\tau$  et de gain statique  $\mu_0$ , montrer que le régime linéaire est instable.
2. On adopte à présent le modèle de l'ALI idéal. Puisque le régime linéaire est instable, l'ALI fonctionne en régime saturé. Établir le cycle d'hystérésis de ce comparateur.
3. En salle de travaux pratiques, les alimentations de l'ALI sont  $+V_{sat}$  et  $-V_{sat}$  avec  $V_{sat} = 15\text{ V}$ , le générateur de fonctions délivre des tensions alternatives de formes carré, triangle ou sinus, dont l'amplitude est limitée à 10 V. Le courant de sortie du générateur de fonctions est limité à 20 mA et la source de tension qui délivre  $V_0$  est réglable entre 0 V et 20 V. Proposer un choix raisonné de valeurs pour les résistances  $R_1$ ,  $R_2$  et pour  $V_0$ , de façon à pouvoir observer un cycle d'hystérésis à l'oscilloscope. Préciser la forme d'onde délivrée par le générateur de fonctions, ainsi que les réglages de l'oscilloscope.

**EXERCICE 6 Stabilité d'un circuit**

●●○ 20 min.

Dans le montage ci-dessous, on suppose que l'ALI est idéal, de gain infini et fonctionne en régime linéaire.



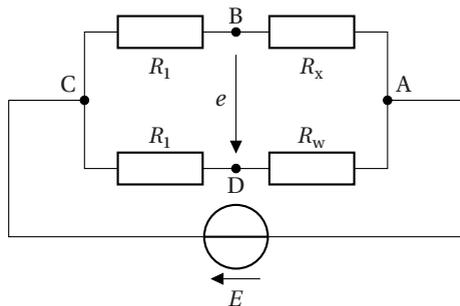
1. Établir l'équation différentielle vérifiée par la tension de sortie. Le régime linéaire est-il stable ?
2. La tension de sortie du montage est initialement nulle, comment évolue le signal en fonction du temps ? Peut-on considérer que l'ALI fonctionne à tout instant en régime linéaire ?

**EXERCICE 7 Électronique d'asservissement - Médilisation (d'après CCP PSI)**

●●● 30 min.

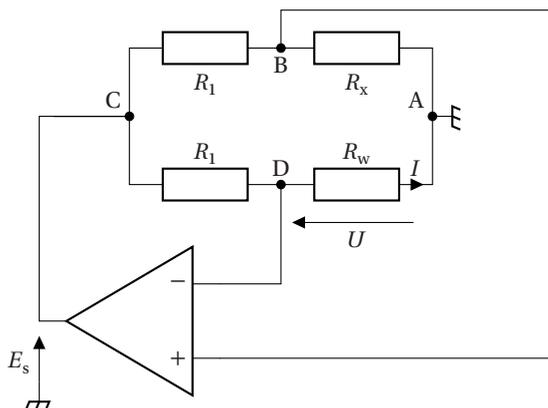
Le problème étudie la mesure du débit d'un fluide grâce à un dispositif appelé « anémomètre à fil chaud ». Une résistance variable est placée dans l'écoulement. À cause de celui-ci, un transfert thermique passe de la résistance vers le fluide. La température de celle-ci est donc asservie pour rester constante. La mesure de cet asservissement permet de remonter à la vitesse du fluide. De façon indirecte, la résistance du fil chaud dépend du courant qui la traverse et de la vitesse du fluide. Par ailleurs, pour une valeur de résistance donnée, la température de celle-ci est fixée de façon univoque.

- La résistance du fil chaud est insérée dans un circuit de type « pont de Wheatstone ». Ce circuit comporte deux résistances égales à  $R_1$ , une résistance  $R_x$ , que l'on peut faire varier, et le fil chaud représenté par la résistance  $R_w$ . En utilisant deux diviseurs de tension bien choisis, montrer que la tension  $e$  est égale à  $e = R \left( \frac{1}{1 + \delta} - \frac{1}{1 + \beta} \right)$ , où l'on précisera les expressions de  $\beta$  et  $\delta$ . Quelle est la condition sur  $R_w$  et  $R_x$  pour que le pont soit *équilibré*, c'est-à-dire  $e = 0$ ?



On peut choisir d'équilibrer le pont ( $e = 0$ ) en jouant sur la valeur de  $R_x$ , ce qui fixe la température de travail du fil chaud. Lorsque la vitesse de l'écoulement varie, le pont est déséquilibré, car  $R_w$  varie. Afin de maintenir la température constante, le circuit électrique doit comporter une boucle de rétroaction présentée sur la figure ci-après (voir page suivante). L'amplificateur linéaire intégré (ALI) fonctionne en régime linéaire et est idéal.

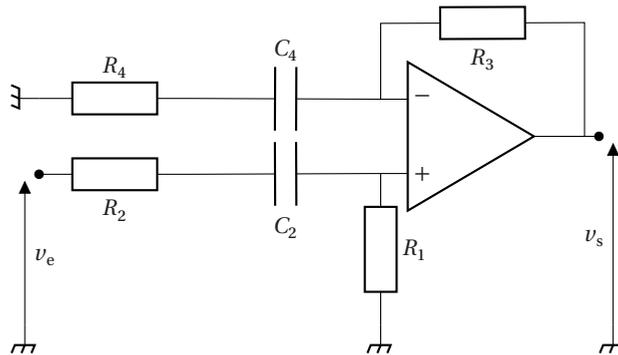
- Que valent les courants d'entrée  $i_+$  et  $i_-$  respectivement dans les bornes d'entrée + et - de l'ALI? Que vaut la tension entre ces deux bornes d'entrée dans le cas d'un fonctionnement linéaire?
- Montrer que ce circuit permet d'ajuster le courant  $I$  pour que le fil chaud soit maintenu à température constante lorsque la vitesse de l'écoulement  $V$  varie. On rappelle que la résistance  $R_w(V, I)$  est une fonction du courant qui la traverse,  $I$ , et la vitesse du fluide,  $V$ .
- Montrer que la tension de sortie de l'ALI  $E_s$  vaut  $\gamma U$  où l'on exprimera  $\gamma$  en fonction de  $R_1$  et  $R_w$ . En admettant que  $R_w I^2 = \alpha + \beta \sqrt{V}$ , montrer que la tension de sortie de l'ALI vérifie la loi de King  $E_s^2 = A + B \sqrt{V}$ , où l'on ne cherchera pas l'expression des coefficients.



### EXERCICE 8 Étude d'un filtre (d'après Banque PT)

●●● 30 min.

- Tracer la caractéristique statique d'un amplificateur linéaire intégré (ALI) idéal de gain infini (représentant la tension de sortie en fonction de la tension différentielle d'entrée) et la commenter.  
On étudie d'abord le circuit ci-dessous où  $v_e$  est une tension sinusoïdale de pulsation  $\omega$ . L'ALI est idéal et fonctionne en régime linéaire.
- Dessiner les schémas équivalents en basses et hautes fréquences de ce circuit.
- Déterminer alors les expressions de la tension de sortie  $v_s$  dans ces limites.
- En déduire la nature probable du filtre.



5. Déterminer la fonction de transfert  $\underline{H}(\omega) = \frac{v_s}{v_e}$  et la mettre sous la forme :

$$\underline{H}(\omega) = \frac{\underline{H}_1(\omega)\underline{H}_2(\omega)}{\underline{H}_3(\omega)\underline{H}_4(\omega)},$$

où  $\underline{H}_1$ ,  $\underline{H}_2$ ,  $\underline{H}_3$  et  $\underline{H}_4$  sont quatre fonctions de transferts du premier ordre de la forme :

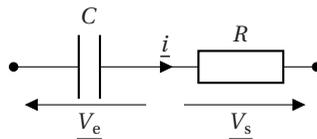
$$\underline{H}_1(\omega) = j\frac{\omega}{\omega_1} \quad \text{et} \quad \underline{H}_i(\omega) = 1 + j\frac{\omega}{\omega_i} \quad \text{pour} \quad i = 2, 3 \text{ et } 4.$$

On exprimera les  $\omega_i$  en fonction des composants.

## CORRIGÉS

### EXERCICE 1

1. Il y a une rétroaction unique entre la sortie et l'entrée négative de l'ALI, celui-ci est donc en régime linéaire.
2. Dans le régime linéaire, on a  $\underline{V}_+ = \underline{V}_-$ . Or,  $\underline{V}_+ = 0$ , car la borne positive est reliée à la masse. Ainsi, la tension  $\underline{V}_e$  se retrouve aux bornes du condensateur et la tension  $\underline{V}_s$  aux bornes de la résistance. Par ailleurs, dans le régime linéaire, les courants d'entrées de l'ALI sont nuls. Ainsi, aucun courant n'arrive sur l'entrée négative de l'ALI. Par conséquent, la résistance et le condensateur sont parcourus par le même courant  $\underline{i}$ . Le circuit est équivalent au circuit ci-dessous.



On utilise ensuite les impédances des dipôles et on a :

$$\underline{i} = jC\omega\underline{V}_e = -\frac{\underline{V}_s}{R}, \quad \text{d'où} \quad \boxed{\underline{H}(\omega) = -jRC\omega}.$$

Le signe moins provient de la convention. En effet, la loi d'Ohm s'applique en convention récepteur, alors que la résistance  $R$  est en convention générateur sur le circuit.

- On a  $jRC\omega V_e = -V_s$ . En repassant dans le domaine temporel, on obtient  $V_s(t) = -RC \frac{dV_e(t)}{dt}$ . La tension de sortie est la dérivée de la tension d'entrée, d'où la dénomination du montage. Pour s'affranchir du signe négatif, on peut utiliser ensuite un montage amplificateur inverseur (voir la section Méthodes). Le montage dérivateur vu en première année sans ALI n'est valide que pour une certaine gamme de fréquence. L'ALI permet *a priori* de s'affranchir de cette contrainte.
- On retrouve la tension d'entrée aux bornes de la capacité  $C$  et la masse au niveau de l'entrée négative, elle même parcourue par le courant d'entrée. L'impédance d'entrée de ce montage vaut donc  $\frac{1}{jC\omega}$ .

**EXERCICE 2**

**Montage pseudo-intégrateur**

- Présence d'une rétroaction négative unique.
- On a l'impédance équivalente à la résistance et au condensateur en parallèle  $Z_{eq} = \frac{R_2}{1 + jR_2C\omega}$ . On utilise ensuite  $V_+ = V_- = 0$  et  $i_- = 0$ . Le même courant parcourant les deux impédances, on a :

$$\underline{H}(\omega) = -\frac{R_2}{R_1} \frac{1}{1 + jR_2C\omega}$$

*Il est également possible d'utiliser une loi des nœuds en potentiels (cf Méthode Loi des nœuds en termes de potentiels).*

- On part de la fonction de transfert en remplaçant les multiplications par  $j\omega$  par une dérivée temporelle, il vient :

$$R_2C \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = -\frac{R_2}{R_1} e(t)$$

- Il s'agit d'un filtre passe-bas, intégrateur en temporel si la fréquence est suffisamment élevée. Par rapport à celui dans la section Méthodes, la présence de la résistance  $R_2$  permet d'empêcher la saturation liée à d'éventuelles tensions continues dans le montage, comme celles liées à la valeur moyenne non nulle d'un signal sinusoïdal.

**Montage déphaseur**

- Une rétroaction négative unique est présente.
- D'abord  $i_+ = 0$ , on peut utiliser un pont diviseur de tension qui donne  $V_+ = \frac{1}{1 + jR'C\omega} V_e$ . Ensuite,  $i_-$  étant égal à 0, il vient, par la loi des nœuds en tension (voir la section Méthodes)  $\frac{V_e - V_-}{R} + \frac{V_s - V_-}{R} = 0$ .  
D'où  $V_- = \frac{V_e + V_s}{2}$ . Ensuite, on utilise  $V_+ = V_-$  et il vient :

$$\underline{H}(\omega) = \frac{1 - jR'C\omega}{1 + jR'C\omega}$$

- On part de la fonction de transfert en remplaçant les multiplications par  $j\omega$  par une dérivée temporelle et il vient :

$$R'C \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = -R'C \frac{de(t)}{dt} + e(t)$$

- On remarque que  $|\underline{H}(\omega)| = 1$ , seule la phase est modifiée par ce filtre. Il s'agit donc bien d'un filtre déphaseur qui déphase entre 0 et  $-\pi$ .

### EXERCICE 3

Dans les deux circuits, il y a une rétroaction négative unique qui assure le fonctionnement linéaire.

1.  $v_+ = v_- = 0$ . On applique la loi des nœuds en tension (voir la section Méthodes), car  $i_- = 0$  :

$$\frac{v_2 - 0}{R} + \frac{v_1 - 0}{R} + \frac{v_s - 0}{R} = 0,$$

d'où  $v_s = -(v_2 + v_1)$ . Il s'agit d'un montage additionneur. Il suffit ensuite d'un montage inverseur pour avoir directement l'addition.

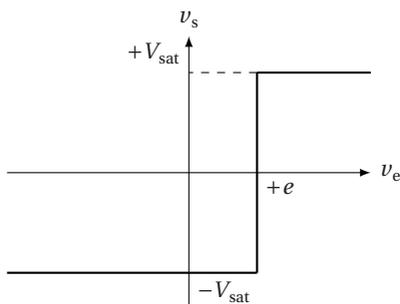
2. Le pont diviseur de tension est :  $v_+ = \frac{R_2}{2R_2} v_2 = \frac{v_2}{2}$ , donc  $v_- = v_+ = \frac{v_2}{2}$ . On applique à nouveau la loi des nœuds en tension, car  $i_+ = 0$  :

$$\frac{v_1 - \frac{v_2}{2}}{R_1} + \frac{v_s - \frac{v_2}{2}}{R_1} = 0,$$

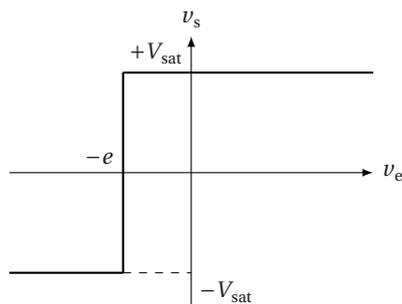
d'où  $v_s = v_2 - v_1$ . Il s'agit d'un montage soustracteur.

### EXERCICE 4

1. Dans les deux cas, il n'y a pas de rétroaction. L'ALI fonctionne en régime saturé. Il s'agit d'un comparateur sans hystérésis.
2. (a)  $\varepsilon = v_+ - v_- = -e + v_e$ .  
 (b)  $\varepsilon = v_+ - v_- = v_e + e$ .
3. (a)



3. (b)



### EXERCICE 5

1. **Rappel** : le modèle de l'ALI d'ordre 1 est décrit par l'équation différentielle suivante :

$$\tau \frac{ds}{dt} + s(t) = \mu_0 \varepsilon(t).$$

Cherchons l'expression de  $\varepsilon(t) = v_+(t) - v_-(t)$ . Comme  $i_+(t) = 0$  A, le même courant parcourt les deux résistances. Cela se traduit par la relation

$$\frac{e(t) - v_+(t)}{R_1} = \frac{v_+(t) - s(t)}{R_2} \implies v_+(t) = \frac{R_2}{R_1 + R_2} e(t) + \frac{R_1}{R_1 + R_2} s(t).$$

Sachant que  $v_-(t) = V_0$ , on réinjecte l'expression de  $\varepsilon(t)$  dans l'équation différentielle. Il vient

$$\tau \frac{ds}{dt} + \left(1 - \mu_0 \frac{R_1}{R_1 + R_2}\right) s(t) = \mu_0 \frac{R_2}{R_1 + R_2} e(t).$$

Compte tenu des valeurs usuelles de résistances, on a  $1 \ll \mu_0 \frac{R_1}{R_1 + R_2}$ . Par conséquent, les coefficients de l'équation différentielle sans second membre sont de signes contraires et le régime linéaire est instable.

2. Supposons que l'ALI soit en saturation positive. Cela implique que  $e(t) > 0$  et, tant que  $e(t) > 0$ , alors l'ALI reste en saturation positive. La question précédente nous fournit l'expression de  $e(t)$ . La condition cherchée s'écrit alors

$$e(t) > \left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right) V_0 - \frac{R_1}{R_2} V_{\text{sat}} = V_1.$$

Supposons l'ALI en saturation négative, à présent. Il le reste tant que  $e(t) < 0$ . Cela donne la condition

$$e(t) < \left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right) V_0 + \frac{R_1}{R_2} V_{\text{sat}} = V_2.$$

On aura bien un cycle d'hystérésis, car les tensions de basculement sont différentes et, dans l'intervalle  $]V_1, V_2[$ , la sortie de l'ALI peut prendre deux valeurs.

Quel est le sens de parcours? Pour  $e(t) < V_1$ , alors  $s(t) = -V_{\text{sat}}$ . En faisant croître  $e(t)$ , il y aura basculement quand  $e(t) = V_2$ . Réciproquement, si  $e(t) > V_2$ , alors  $s(t) = +V_{\text{sat}}$ . En faisant décroître  $e(t)$ , la sortie de l'ALI reste à  $+V_{\text{sat}}$  jusqu'à ce que  $e(t)$  atteigne  $V_1$ . On en déduit que le cycle est parcouru dans le sens anti-horaire.

3. Pour ne pas être gêné par la saturation en courant de sortie du générateur de fonctions, il faut choisir des résistances de l'ordre de quelques kΩ, voire quelques dizaines de kΩ.

D'autre part, pour explorer toutes les valeurs possibles entre  $V_1$  et  $V_2$  et même au-delà, on choisit une forme triangulaire pour  $e(t)$ . Une forme sinusoïdale fonctionne aussi, mais il faut éviter le créneau qui opère par saut.

Enfin, pour observer les deux basculements, il faut avoir  $V_2 < 10\text{ V}$  et  $V_1 > -10\text{ V}$ . Il y a évidemment beaucoup de choix possibles. On a intérêt à choisir  $\frac{R_1}{R_2}$  suffisamment petit pour que  $V_2$  garde des valeurs raisonnables. Arbitrairement, on prend  $R_2 = 10\text{ k}\Omega$  et  $R_1 = 2\text{ k}\Omega$ . Dans ce cas,  $\frac{R_1}{R_2} V_{\text{sat}} \approx 3\text{ V}$ . Alors on a

$$V_0 < 10\text{ V} \implies V_0 < \frac{7}{1,2} \approx 5,8\text{ V}.$$

Si on fait un autre choix, par exemple,  $R_2 = 3R_1$ , alors  $V_0 < 3 \times \frac{10 - 5}{4} \approx 3,8\text{ V}$ . Nous constatons que la plage de valeurs possibles pour  $V_0$  est d'autant plus réduite que le rapport  $\frac{R_1}{R_2}$  est proche de 1.

### EXERCICE 6

1. Attention, on ne connaît pas le courant qui sort de l'ALI, donc il ne faut pas appliquer de loi des nœuds en sortie d'ALI.

En revanche,  $i^- = 0$ , donc on peut appliquer un pont diviseur, ce qui donne  $v^- = \frac{v_s}{2}$ .

Il en est de même, pour établir l'équation différentielle. Passons provisoirement en régime sinusoïdal forcé et appliquons un pont diviseur sur l'entrée positive. Il vient :

$$\underline{v}^+ = \frac{R}{R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega}} \underline{v}_s.$$

Le régime linéaire étant atteint,  $v^+ = v^- = \frac{v_s}{2}$ , d'où :

$$R\underline{v}_s = \frac{R}{2}\underline{v}_s + jL\omega\underline{v}_s + \frac{1}{jC\omega}\underline{v}_s,$$

soit :

$$(j\omega)^2 \underline{v}_s - j\omega \frac{R}{2L} \underline{v}_s + \frac{1}{LC} \underline{v}_s = 0.$$

D'où l'équation différentielle :

$$\boxed{\frac{d^2 v_s(t)}{dt^2} - \frac{R}{2L} \frac{dv_s(t)}{dt} + \frac{1}{LC} v_s(t) = 0}.$$

Le système est instable car le signe devant la dérivée d'ordre 1 est négatif.

2. La sortie du signal va croître. Selon les valeurs des paramètres, une oscillation sera présente ou non. Au bout d'un moment, lorsque  $v_s = \pm V_{\text{sat}}$ , l'ALI ne sera plus en régime linéaire et il saturera. L'étude précédente ne sera plus valable.

### EXERCICE 7

1. On a : 
$$e = -U_{\text{DC}} + U_{\text{CB}} = \left( -\frac{R_1}{R_x + R_1} + \frac{R_1}{R_1 + R_w} \right) E.$$

On pose  $\beta = \frac{R_x}{R_1}$  et  $\delta = \frac{R_w}{R_1}$  et on obtient le résultat. Pour que le pont soit équilibré, il faut  $\beta = \delta$ , d'où

$$\boxed{R_x = R_w}.$$

2.  $i_+ = i_- = 0$  et  $\varepsilon = v_+ - v_- = 0$ .
3.  $v_- = U$  et  $v_+ = U_{\text{BA}}$ . D'où  $U = U_{\text{BA}}$ . Les résultats précédents impliquent que le pont est équilibré. Cela signifie que le courant en sortie de l'ALI s'adapte pour réaliser cette condition. Le courant  $I$  s'ajuste donc pour imposer la résistance  $R_w(V, I) = R_x$ . Or, si cette résistance est fixée, sa température l'est aussi.
4. Le point A est relié à la masse. Ainsi, la tension entre A et C vaut  $E_s$ . Par ailleurs, comme aucun courant ne rentre dans l'entrée -, on peut utiliser un pont diviseur de tension comme dans la question 1. Ainsi,  $U = \gamma E_s$  avec  $\gamma = \frac{R_w}{R_1 + R_w}$ . On utilise simplement la donnée suivante :  $E_s^2 \propto U^2 \propto R_w^2 I^2$ .

### EXERCICE 8

1. En basse fréquence, les condensateurs sont équivalents à un interrupteur ouvert. En haute fréquence, ce sont des fils. Il faut refaire le schéma en utilisant ces équivalences.
2. En basse fréquence, toutes les tensions sont nulles. Les signaux sont coupés. En haute fréquence, il s'agit du montage soustracteur vu dans un exercice précédent. Par ailleurs, l'entrée supérieure étant reliée à la masse, il s'agit d'un montage suiveur.
3. En basse fréquence,  $v_s = 0$ , tandis qu'en haute fréquence,  $v_+ = \frac{R_1}{R_2 + R_1} v_e$  (d'après le pont diviseur).

On applique la loi des nœuds en tension  $\frac{v_- - 0}{R_4} + \frac{v_- - v_s}{R_3}$ , ce qui implique, avec  $v_+ = v_-$  :

$$\boxed{v_s = \left( 1 + \frac{R_3}{R_4} \right) \frac{R_1}{R_2 + R_1} v_e}.$$

4. Au vu de ce comportement, il s'agit vraisemblablement d'un filtre passe-haut.
5. Tout d'abord, remplaçons  $R_4$  et  $C_4$  par leur impédance équivalente  $\underline{Z}_4 = R_4 + \frac{1}{jC_4\omega}$ .

Faisons de même pour  $R_2$  et  $C_2$  par  $\underline{Z}_2 = R_2 + \frac{1}{jC_2\omega}$ . Ainsi, avec un pont diviseur de tension,  $\underline{v}_+ = \frac{R_1}{R_1 + \underline{Z}_2} v_e$ .

Puis appliquons de nouveau la loi des nœuds en tension :  $\frac{v_- - 0}{\underline{Z}_4} + \frac{v_- - v_s}{R_3} = 0$ .

Finalement, avec  $\underline{v}_+ = v_-$  : 
$$\underline{v}_s = \frac{\underline{Z}_4 + R_3}{\underline{Z}_4} \frac{R_1}{R_1 + \underline{Z}_2} v_e = \frac{1 + j(R_3 + R_4)C_4\omega}{1 + jR_4C_4\omega} \frac{jR_1C_1\omega}{1 + j(R_1 + R_2)C_2\omega} v_e.$$

Il vient : 
$$\boxed{\omega_1 = \frac{1}{R_1C_1}}, \quad \boxed{\omega_2 = \frac{1}{(R_3 + R_4)C_4}}, \quad \boxed{\omega_3 = \frac{1}{(R_1 + R_2)C_2}} \quad \text{et} \quad \boxed{\omega_4 = \frac{1}{R_4C_4}}.$$

On retrouve bien le comportement prévu à hautes et basses fréquences.

# Oscillateurs

## Objectifs et compétences du programme

Capacités principales à maîtriser	Méthodes associées	Exercices associés
Étude d'un oscillateur quasi-sinusoidal.	1 à 3	1 à 4
Étude d'un oscillateur à relaxation.	4 et 5	5

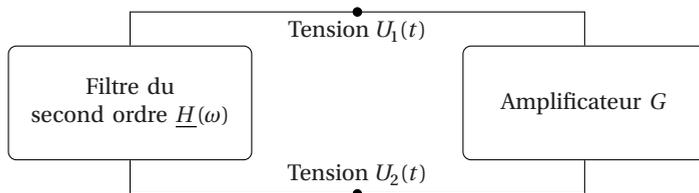
## RAPPELS DE COURS

Ce chapitre aborde deux types d'oscillateurs, en réutilisant les notions introduites dans les parties de cours des deux chapitres précédents.

### 1. Oscillateur quasi-sinusoidal

#### 1.1. Structure

Dans le cadre du programme, les oscillateurs quasi-sinusoidaux étudiés ont la structure représentée à la figure 3.1.



**Figure 3.1.** Schéma bloc d'un oscillateur quasi-sinusoidal similaire à l'oscillateur de Wien. Pour observer des oscillations, le gain doit être supérieur à un gain limite et un élément actif doit être présent dans le montage. Le filtre est défini par sa fonction de transfert  $\underline{H}(\omega)$ , tandis que l'amplificateur est défini par son gain  $G$ .

Les éléments principaux sont donc :

- un amplificateur de gain réel  $G$  composé d'un élément actif capable de fournir de l'énergie;
- un filtre passe-bande du second ordre.

#### 1.2. Condition d'oscillations

Si on observe des oscillations sinusoidales de pulsation  $\omega$  à déterminer, alors on peut passer en notation complexe. La fonction de transfert du filtre passe-bande peut s'écrire

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{H_0}{1 + jQ \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)}$$

D'après le schéma-blocs, on a donc

$$GH(j\omega) = 1 \implies \begin{cases} GH_0 = 1 \\ \omega = \omega_0 \end{cases} .$$

Dans le domaine temporel et en supposant que l'amplificateur fonctionne en régime linéaire, l'équation différentielle vérifiée par  $U_1(t)$ , par exemple, s'écrit

$$\frac{d^2 U_1}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} (1 - GH_0) \frac{dU_1}{dt} + \omega_0^2 U_1(t) = 0.$$

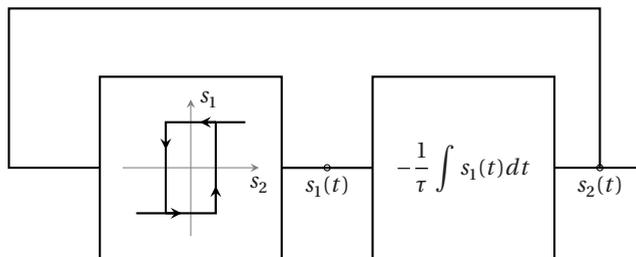
En pratique, pour observer des oscillations d'amplitude notable, quasiment sinusoïdales, il faut avoir  $GH_0 \approx 1$  et  $GH_0 > 1$  (cf Méthode 3).

## 2. Oscillateur de relaxation

### 2.1. Structure

On part en général d'un système à deux niveaux et on va le modifier pour qu'aucun des deux niveaux ne soit stable.

On peut représenter la plupart des montages étudiés sous la forme du schéma-blocs suivant :



#### Remarque

On peut aussi associer un comparateur inverseur et un intégrateur non inverseur pour réaliser un oscillateur de relaxation.

### 2.2. Recherche de la période des oscillations

On peut remarquer que si la sortie du comparateur fonctionne par sauts, en revanche, la sortie de l'intégrateur est une fonction continue du temps.

La méthodologie est la suivante :

- on suppose que le régime d'oscillations est établi;
- on choisit comme instant origine, un instant de basculement de la sortie du comparateur. Par exemple, depuis l'état bas vers l'état haut. Cela définit les conditions initiales de la phase qui commence;
- établir la loi d'évolution de la sortie de l'intégrateur, puis déterminer l'instant  $t_1$  où la sortie du comparateur va à nouveau basculer;
- refaire cette même étude sur la deuxième phase de fonctionnement en choisissant à nouveau le basculement comme origine des temps. La durée de cette deuxième phase est  $t_2$  ;
- conclusion : la période vaut  $T = t_1 + t_2$ .

# MÉTHODES

Retrouvez ici toutes les méthodes indispensables pour mieux appréhender les exercices et utiliser le cours.

## 1. L'oscillateur à pont de Wien

### Méthode 1. Le pont de Wien

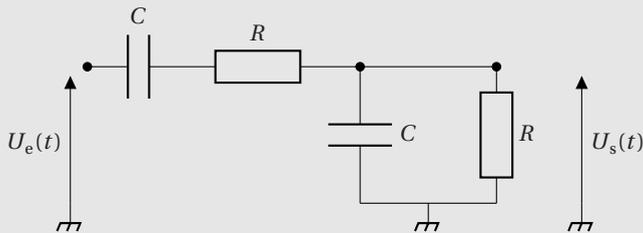


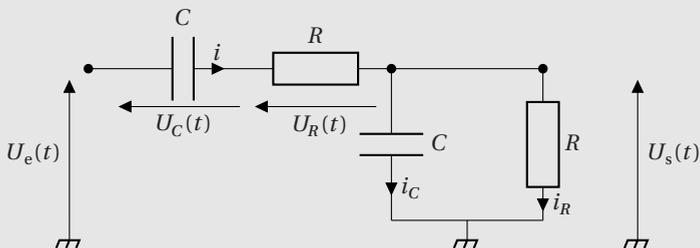
Figure 3.2. Le montage électronique du pont de Wien.

À l'aide de la méthode de votre choix, montrer la relation différentielle suivante :

$$\frac{d^2 U_s(t)}{dt^2} + \frac{3}{RC} \frac{dU_s(t)}{dt} + \frac{U_s(t)}{(RC)^2} = \frac{1}{RC} \frac{dU_e(t)}{dt}. \quad (3.1)$$

### Application de la méthode

- **Avec les relations tension-courant des dipôles** : tout d'abord, il faut noter en respectant la convention récepteur les différents courants et tensions apparaissant dans le circuit.



Ensuite, écrivons les relations des dipôles :

- loi d'Ohm :  $U_R(t) = Ri(t)$  et  $U_s(t) = Ri_R(t)$  ;
- condensateur :  $i_C(t) = C \frac{dU_s(t)}{dt}$  et  $i(t) = C \frac{dU_C(t)}{dt}$  .

Enfin, écrivons les relations électriques de base :

- **loi des nœuds** :  $i(t) = i_R(t) + i_C(t)$  ;
- **loi des mailles** :  $U_e(t) = U_R(t) + U_C(t) + U_s(t)$  .

Partons de la loi des mailles, que l'on commence par dériver pour faire apparaître la dérivée de la tension de sortie comme demandé :

$$\frac{dU_e(t)}{dt} = \frac{dU_R(t)}{dt} + \frac{dU_C(t)}{dt} + \frac{dU_s(t)}{dt} ,$$

que l'on modifie immédiatement à l'aide des relations des dipôles, soit :

$$\frac{dU_e(t)}{dt} = R \frac{di(t)}{dt} + \frac{i(t)}{C} + \frac{dU_s(t)}{dt} .$$

À l'aide de la loi des nœuds, il vient :

$$\frac{dU_e(t)}{dt} + R \frac{di_R(t)}{dt} + R \frac{di_C(t)}{dt} + \frac{i_C(t)}{C} + \frac{i_R(t)}{C} = \frac{dU_s(t)}{dt} ,$$

que l'on modifie à nouveau avec les relations des dipôles, soit :

$$\frac{dU_e(t)}{dt} + \frac{dU_s(t)}{dt} + RC \frac{d^2U_s(t)}{dt^2} + \frac{dU_s(t)}{dt} + \frac{U_s(t)}{RC} = \frac{dU_s(t)}{dt} ,$$

soit, au final, la relation attendue.

- **Avec les impédances complexes :** on a directement en régime complexe avec un pont diviseur de tension, soit :

$$\underline{U}_s = \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2} \underline{U}_e = \frac{1}{1 + \underline{Y}_1 \underline{Z}_2} \underline{U}_e ,$$

avec  $\underline{Y}_1 = \frac{1}{Z_1} = jC\omega + \frac{1}{R}$  et  $\underline{Z}_2 = R + \frac{1}{jC\omega}$ .

Il vient

$$\begin{aligned} \underline{U}_s &= \underline{U}_e \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{R} + jC\omega\right) \left(R + \frac{1}{jC\omega}\right)} \\ &= \underline{U}_e \frac{1}{3 + jRC\omega + \frac{1}{jRC\omega}} . \end{aligned}$$

D'où

$$((jRC\omega)^2 + 3jRC\omega + 1) \underline{U}_s = jRC\omega \underline{U}_e ,$$

ce qui correspond bien à la relation différentielle de l'énoncé en revenant en temporel en remplaçant  $j\omega$  par une dérivée d'ordre 1 et  $(j\omega)^2$  par une dérivée d'ordre 2 et en divisant la relation par  $(RC)^2$ .

- **Avec la loi des nœuds en tension :** pour se rappeler ce qu'est la loi des nœuds en tension, on renvoie le lecteur à la dernière méthode du chapitre précédent. La loi des nœuds s'écrit  $0 = \underline{i} + \underline{i}_R + \underline{i}_C$ . Chaque courant est remplacé à l'aide de la loi des mailles, et il vient :

$$0 = \frac{\underline{U}_s - \underline{U}_e}{R + \frac{1}{jC\omega}} + \frac{\underline{U}_s}{R} + jC\omega \underline{U}_s ,$$

soit :

$$jC\omega \underline{U}_e = jC\omega \underline{U}_s + (1 + jRC\omega) \frac{\underline{U}_e}{R} + (1 + jRC\omega) jC\omega \underline{U}_s ,$$

d'où en développant et en multipliant par  $R$ , on retrouve la relation précédente.

## Méthode 2. L'oscillateur

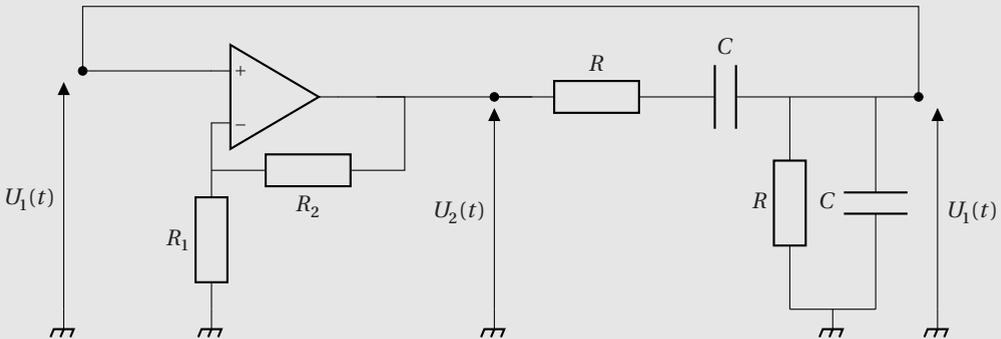


Figure 3.3. Le montage électronique de l'oscillateur à pont de Wien.

1. Identifier dans le schéma électronique deux blocs distincts connus.
2. En déduire deux relations entre les tensions  $U_1(t)$  et  $U_2(t)$ .
3. Justifier que la tension  $U_1(t)$  vérifie l'équation différentielle suivante :

$$\frac{d^2 U_1(t)}{dt^2} + \omega_0 (3 - G) \frac{dU_1(t)}{dt} + \omega_0^2 U_1(t) = 0, \quad (3.2)$$

avec  $G$  un coefficient à déterminer.

### Application de la méthode

1. L'oscillateur est un pont de Wien bouclé à un amplificateur non inverseur. On peut remarquer deux choses essentielles à propos de ce circuit :
  - il n'a pas de tension d'entrée;
  - il possède un ALI qui est alimenté sur le réseau électrique pour fonctionner, celui-ci peut donc fournir de l'énergie au système.
2. En identifiant, pour le pont de Wien, les notations des figures 3.2 et 3.3, on remarque que la tension d'entrée de celui-ci est  $U_2(t)$  tandis que sa tension de sortie est  $U_1(t)$ . Le courant sortant du pont de Wien est nul car sa sortie est reliée à l'entrée + de l'ALI, qui est de courant nul par hypothèse sur l'ALI idéal. Ainsi, en reprenant l'équation (3.1), il vient :

$$\frac{d^2 U_1(t)}{dt^2} + 3\omega_0 \frac{dU_1(t)}{dt} + \omega_0^2 U_1(t) = \omega_0 \frac{dU_2(t)}{dt}. \quad (3.3)$$

Par ailleurs, comme nous l'avons vu au chapitre précédent, dans le régime linéaire, la fonction de transfert dans l'amplificateur non inverseur implique :

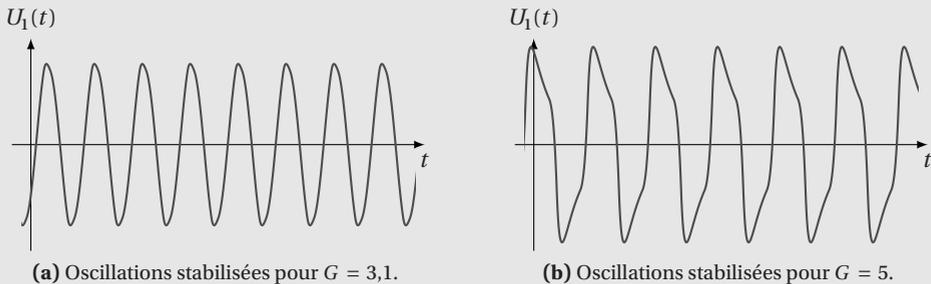
$$U_2(t) = \left( 1 + \frac{R_2}{R_1} \right) U_1(t) = G U_1(t), \quad (3.4)$$

en ayant remarqué que, pour l'amplificateur, tout comme pour le pont de Wien, la tension d'entrée est  $U_1(t)$ , tandis que celle de sortie est  $U_2(t)$ . On note  $G = 1 + \frac{R_2}{R_1}$  le gain de l'amplificateur.

3. En remplaçant  $U_2(t)$  dans la première équation à l'aide de la seconde, il vient l'équation différentielle recherchée.

### Méthode 3. Naissance et stabilisation des oscillations

1. Selon la valeur de  $G$ , déterminer et décrire les régimes possibles pour la tension  $U_1(t)$  vérifiant l'équation (3.2).
2. On se place dans le cas  $G > 3$ , justifier que la tension en sortie d'ALI,  $U_2(t)$ , ne peut pas dépasser une certaine valeur. En déduire alors la valeur atteinte par la tension  $U_1(t)$ .
3. En reprenant l'équation différentielle de la question 2 de la méthode précédente, justifier alors que la tension  $U_1(t)$  suit une nouvelle équation différentielle permettant la modération de sa croissance.
4. Justifier et décrire le fonctionnement de l'oscillateur.
5. On trace dans la figure 3.4 deux oscillations stabilisées pour deux valeurs de  $G$ . Définir la distorsion harmonique et justifier que l'oscillateur à pont de Wien est qualifié d'oscillateur « quasi-sinusoidal ».



**Figure 3.4.** Visualisation de la distorsion harmonique sur le régime oscillant. On remarque que pour  $G$  plus éloigné de 3, la valeur limite, plus le signal contient des harmoniques.

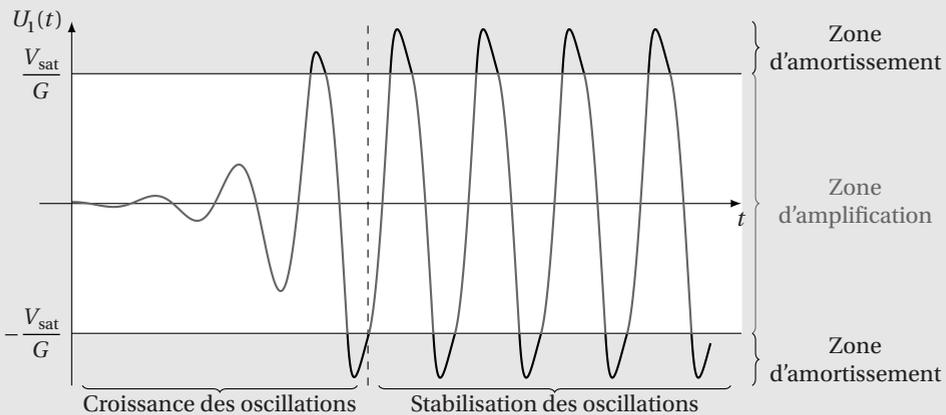
### Application de la méthode

1. L'équation différentielle (3.2) peut être étudiée à l'aide des outils du chapitre sur la stabilité des systèmes linéaires. On peut en déduire trois types de comportements selon les valeurs des résistances  $R_1$  et  $R_2$  :
  - si  $G = 3$ , le facteur numérique devant la dérivée d'ordre un est nul. Il s'agit de l'équation d'un oscillateur harmonique ;
  - si  $G < 3$ , le facteur numérique devant la dérivée d'ordre un est positif. Il s'agit de l'équation d'un oscillateur amorti ;
  - si  $G > 3$ , le facteur numérique devant la dérivée d'ordre un est négatif. Il s'agit de l'équation d'un système instable, dont les solutions seront exponentiellement croissantes.
 Pour pouvoir discuter les solutions de ces équations, il faut prendre en compte les conditions initiales du système. *A priori*, comme le système n'est pas alimenté par une tension d'entrée, la tension initiale  $U_1(t = 0) = 0$ . En réalité, il ne s'agit pas d'une nullité absolue. En effet, l'ALI est alimenté et donc, nécessairement, un bruit électronique de très faible amplitude (inférieur au millivolt) est présent dans le circuit. Reprenons alors les trois cas précédents :
  - si  $G = 3$ , une oscillation harmonique apparaît avec une amplitude de l'ordre de celle du bruit. Si le bruit n'est pas mesurable, cette oscillation ne l'est pas non plus. Il ne se passe rien d'observable ;
  - si  $G < 3$ , le bruit provoque l'apparition d'une oscillation amortie, d'amplitude initiale de l'ordre de celle du bruit, puis décroissante, si le bruit n'est pas mesurable, ce signal ne l'est pas non plus. Il ne se passe rien d'observable ;
  - si  $G > 3$ , la solution de l'équation différentielle est d'amplitude exponentiellement croissante, le bruit très faible mais non rigoureusement nul est amplifié et l'on observe une naissance des oscillations.

**Remarque**

Le cas  $G = 3$  est un cas essentiellement théorique. En effet, il implique que  $R_2 = 2R_1$  exactement et expérimentalement. Il est impossible avec du matériel élémentaire de se placer exactement à cette condition. En réalité, on sera systématiquement au dessus ou en dessous de cette condition.

- Dans le cas  $G > 3$ , des oscillations apparaissent et leur amplitude croît exponentiellement. Rien dans l'équation (3.2) ne permet d'empêcher ou de freiner cette croissance. Or, une amplitude qui tend vers l'infini implique une énergie qui tend aussi vers l'infini. Cela est physiquement impossible. En réalité, l'énergie nécessaire à la croissance des oscillations provient de l'alimentation électrique de l'ALI. Or, comme nous l'avons vu au chapitre précédent, lorsque l'amplitude des signaux augmente, l'ALI quitte le régime linéaire pour aller dans le régime saturé. Dans ce cas,  $U_2(t) = \pm V_{\text{sat}}$  et, à l'aide de l'équation (3.4), la tension limite vaut  $U_{1,\text{lim}} = \frac{V_{\text{sat}}}{G}$ .
- Si  $U_2(t)$  est constante, l'équation (3.2) n'est plus valide. Il faut donc revenir à l'équation (3.3). La tension,  $U_2(t)$  est constante, sa dérivée est donc nulle. La tension  $U_1(t)$  est alors simplement régie par une équation homogène stable. Donc son amplitude décroît (il s'agit de l'équation linéaire du second ordre de l'oscillateur amorti). Ce comportement est représenté sur la figure 3.5.
- Lorsque l'amplitude de  $U_1(t)$  devient suffisamment faible, l'ALI revient en régime linéaire. L'amplitude des oscillations est donc régie par l'équation différentielle (3.2) et les conditions initiales provenant de la phase amortie et ainsi de suite. La tension  $U_1(t)$  est donc une fonction périodique. Nous avons constitué un oscillateur.

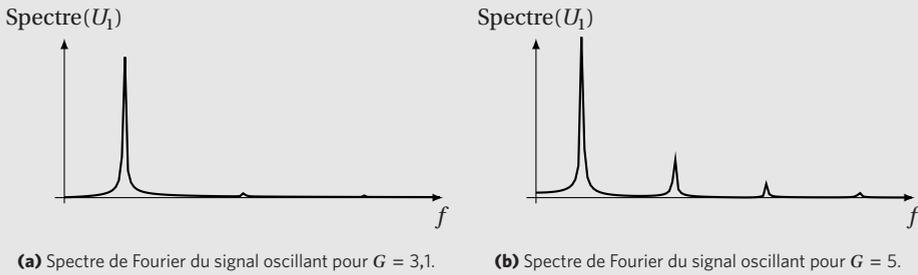


**Figure 3.5.** Naissance et stabilisation des oscillations pour un oscillateur à pont de Wien.

- On remarque immédiatement sur les différentes courbes que les oscillations ne sont pas sinusoïdales. C'est normal au vu du système donnant naissance à ces oscillations, qui est loin d'être un simple système d'oscillateur harmonique. En particulier, sur les spectres des courbes sur la figure 3.4 sont tracés figure 3.6. Plusieurs harmoniques sont présentes. Ce phénomène est la « **distorsion harmonique** ».

**Propriété 3.1. Oscillateur quasi-sinusoïdal**

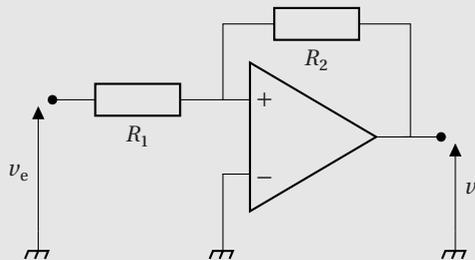
Pour les oscillations du pont de Wien, plus  $G$  est proche de 3, plus le signal oscillant est proche d'une sinusoïde de pulsation fondamentale égale à  $\omega_0$  mais plus le régime transitoire de croissance des oscillations est long. Inversement, plus  $G$  est grand, moins le signal oscillant est proche d'une sinusoïde, plus sa pulsation fondamentale diminue et plus le régime transitoire est court. Pour se rapprocher d'une véritable sinusoïde, on peut, par exemple, utiliser du filtrage haute fréquence pour couper les harmoniques qui déforment le signal. L'oscillateur à pont de Wien est qualifié d'« **oscillateur quasi-sinusoïdal** ».



**Figure 3.6.** Visualisation de la distorsion harmonique sur le régime oscillant. On remarque que plus  $G$  est éloigné de 3, la valeur limite, plus le signal contient des harmoniques.

## 2. L'oscillateur à relaxation

**Méthode 4.** Le comparateur non inverseur

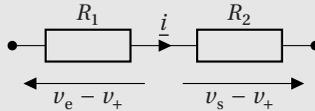


1. Quel est le régime de fonctionnement de l'ALI?
2. Exprimer la tension différentielle  $\varepsilon$  en fonction de  $v_s$  et  $v_e$ .
3. Quels sont les seuils de basculement?
4. Tracer le cycle de fonctionnement du comparateur.

### Application de la méthode

1. Une rétroaction unique positive est présente, l'ALI est en régime saturé et il s'agit d'un comparateur à hystérésis.

2. On a  $v_- = 0$  car l'entrée négative de l'ALI est reliée à la masse. Il vient  $\varepsilon = v_+ - v_- = v_+$ . Par ailleurs, dans le régime linéaire, les courants d'entrée sont nuls. Ainsi, aucun courant n'arrive sur l'entrée positive de l'ALI. Par conséquent, les résistances sont parcourus par le même courant  $i$ . Le circuit est équivalent au circuit ci-dessous.



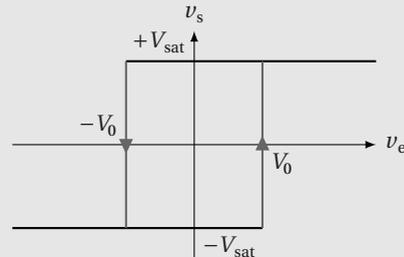
On utilise ensuite les impédances des dipôles et la loi d'Ohm, il vient :

$$i = \frac{v_e - v_+}{R_1} = -\frac{v_s - v_+}{R_2}, \quad \text{d'où} \quad v_+ = \varepsilon = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \left( \frac{v_e}{R_1} + \frac{v_s}{R_2} \right).$$

Le signe moins provient de la convention. En effet, la loi d'Ohm s'applique en convention récepteur, alors que la résistance  $R_2$  est en convention générateur sur le circuit.

3. Le basculement a lieu lorsque  $\varepsilon$  change de signe d'où  $v_e = -v_s \frac{R_1}{R_2}$ . Or, en régime saturé,  $v_s = \pm V_{sat}$ , d'où les tensions de basculement  $\pm \frac{R_1}{R_2} V_{sat}$ , que l'on notera  $\pm V_0$ .

4. Prenons une tension d'entrée négative en-dessous des seuils de basculement, dans ce cas,  $\varepsilon < 0$  et  $v_s = -V_{sat}$ . On augmente progressivement la tension d'entrée. Le basculement a lieu lorsque  $v_e = -v_s \frac{R_1}{R_2} = +V_0$ . Inversement, pour une tension d'entrée positive au-dessus du seuil de basculement, la tension de sortie vaut  $v_s = +V_{sat}$ . Si l'on diminue progressivement la tension d'entrée, le basculement a lieu lorsque  $v_e = -v_s \frac{R_1}{R_2} = -V_0$ .



Par rapport au comparateur à hystérésis, vu au chapitre précédent, il n'y a pas d'inversion.

### Méthode 5. L'oscillateur de relaxation

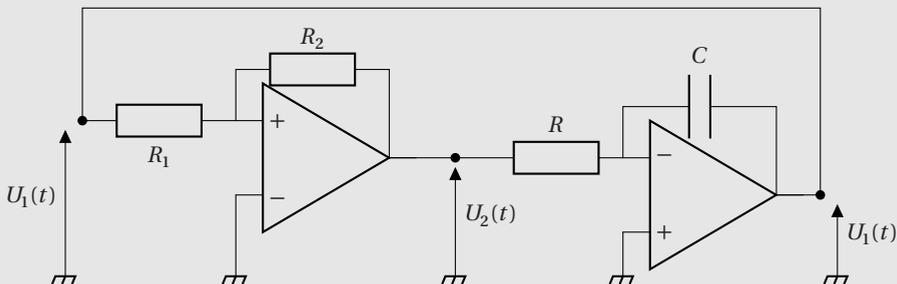


Figure 3.7. Le montage électronique de l'oscillateur à relaxation.

1. Identifier dans le schéma électronique deux blocs distincts connus.
2. Donner la relation temporelle entre la tension de sortie  $U_1(t)$  du second ALI et la tension d'entrée  $U_2(t)$ . On prendra  $U_1(0) = 0$ .
3. On suppose qu'initialement  $U_2(0) = +V_{\text{sat}}$ , en déduire l'expression de  $U_1(t)$ .
4. Donner l'expression du temps de basculement  $t_B$  lorsque la tension  $U_2(t)$  change.
5. En déduire l'expression de  $U_2(t)$  et  $U_1(t)$  pour  $t > t_B$ .
6. Donner l'expression du temps de basculement  $t_C$  lorsque la tension  $U_2(t)$  change à nouveau. Tracer ensuite l'évolution des deux tensions en fonction du temps.
7. En déduire la période  $T$  de l'oscillateur.
8. Quelle doit être la condition sur  $R_1$  et  $R_2$  pour que le montage puisse fonctionner. Quel est l'intérêt de ce montage?

## Application de la méthode

1. On reconnaît deux blocs : un comparateur non inverseur et un filtre intégrateur inverseur. On peut remarquer deux choses essentielles à propos de ce circuit :
  - il n'a pas de tension d'entrée;
  - il possède deux ALI qui sont alimentés sur le réseau électrique pour fonctionner. Ceux-ci peuvent donc fournir de l'énergie au système.
2. Le filtre intégrateur a été étudié dans la section méthode du chapitre précédent. Il vient directement :

$$\frac{U_2(t)}{R} = -C \frac{dU_1(t)}{dt}, \quad \text{d'où} \quad \boxed{U_1(t) = U_1(0) - \frac{1}{RC} \int_0^t U_2(s) ds}. \quad (3.5)$$

3. On suppose que  $U_2(0) = +V_{\text{sat}}$ . Au vu du fonctionnement du comparateur non inverseur, cette valeur va rester constante sur une certaine gamme de temps. Ainsi, en utilisant la relation précédente et  $U_1(0) = 0$ , il vient :

$$U_1(t) = -\frac{1}{RC} \int_0^t U_2(s) ds = -V_{\text{sat}} \frac{t}{RC},$$

qui est une fonction linéaire décroissante du temps.

4. On déduit des résultats du paragraphe précédent que le comparateur à hystérésis va changer de valeur lorsque  $U_1(t_B) = -\frac{R_1}{R_2} V_{\text{sat}}$ . En reprenant l'expression de la question précédente, on trouve par définition du temps de basculement  $t_B$  :

$$-V_{\text{sat}} \frac{t_B}{RC} = -\frac{R_1}{R_2} V_{\text{sat}}, \quad \text{soit} \quad \boxed{t_B = \frac{R_1}{R_2} RC}.$$

5. Pour  $t > t_B$ , le comparateur a basculé, d'où  $U_2(t) = -V_{\text{sat}}$ . Dans ce cas, la relation intégrale entre  $U_1(t)$  et  $U_2(t)$  devient :

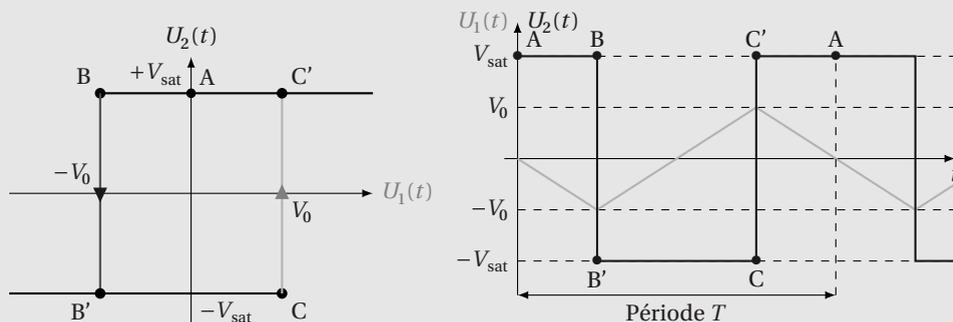
$$\begin{aligned} U_1(t) &= -\frac{1}{RC} \int_0^t U_2(s) ds = \frac{1}{RC} \left( \int_0^{t_B} V_{\text{sat}} ds - \int_{t_B}^t V_{\text{sat}} ds \right) = -\frac{1}{RC} (V_{\text{sat}} t_B - V_{\text{sat}} (t - t_B)) \\ &= \frac{1}{RC} V_{\text{sat}} (t - 2t_B). \end{aligned}$$

Cette fois, la tension  $U_1(t)$  est une fonction linéaire croissante.

6. À nouveau, le basculement se fait pour  $t_C$  lorsque  $U_1(t_C) = \frac{R_1}{R_2} V_{\text{sat}}$  et donc :

$$-V_{\text{sat}} \frac{t_C - 2t_B}{RC} = \frac{R_1}{R_2} V_{\text{sat}}, \quad \text{soit} \quad \boxed{t_C = 2t_B + \frac{R_1}{R_2} RC = 3 \frac{R_1}{R_2} RC}.$$

Le graphe correspondant à l'oscillation est tracé figure 3.8.



**Figure 3.8.** Analyse graphique du fonctionnement de l'oscillateur à relaxation.

On rappelle que  $V_0$  est donnée par  $V_0 = \frac{R_1}{R_2} V_{\text{sat}}$ .

- **Étape A vers B :** supposons qu'initialement le circuit soit dans l'état A. La formule (3.5) indique que la sortie  $U_1(t)$  est l'opposé de l'intégrale de  $U_2(t)$ , qui est une constante positive. Ainsi,  $U_1(t)$  est une droite décroissante.
- **Étape B vers B' :**  $U_1(t)$  atteint la tension de bascule  $-V_0$ .  $U_1(t)$  change de valeur et passe à  $-V_{\text{sat}}$ .  $U_1(t)$  étant l'intégrale de  $U_2(t)$ , une discontinuité ne la fait pas varier.
- **Étape B' vers C :** la formule (3.5) indique que la sortie  $U_1(t)$  est l'opposé de l'intégrale de  $U_2(t)$ , qui est une constante négative. Ainsi,  $U_1(t)$  est une droite croissante.
- **Étape C vers C' :**  $U_1(t)$  atteint la tension de bascule  $+V_0$ .  $U_2(t)$  change de valeur et passe à  $+V_{\text{sat}}$ .
- **Étape C' vers A :**  $U_2(t)$  est l'intégrale de  $U_1(t)$ , donc une droite décroissante.

7. On constate que l'écart de temps entre deux basculements vaut  $t_C - t_B = 2 \frac{R_1}{R_2} RC$ . La période équivaut à deux fois ce temps, car elle correspond à deux phases de bascules successives, soit  $T = 4 \frac{R_1}{R_2} RC$ .

Cette valeur se retrouve sur le graphe de la figure 3.8. Selon la formule (3.5), toutes les portions de droite sont de pente  $\pm V_{\text{sat}}/(RC)$ . Ainsi, pour passer du point B' au point C, le temps nécessaire  $\Delta t$  est donné par la relation  $2V_0 = \frac{V_{\text{sat}} \Delta t}{RC}$  soit, en utilisant  $V_0 = \left(\frac{R_1}{R_2}\right) V_{\text{sat}}$ , il vient  $\Delta t = 2RC \left(\frac{R_1}{R_2}\right)$ . La partie croissante étant de la même durée que la partie décroissante, la période de l'oscillation est donnée par :

$$T = 4RC \frac{R_1}{R_2}$$

8. Le montage n'oscille que si  $U_1(t)$  atteint les valeurs de commutation  $\pm V_0$ . Or,  $U_1(t)$  est la sortie d'un montage à ALI en régime linéaire donc  $|U_1| < V_{\text{sat}}$ . Nécessairement, il faut que  $R_1 < R_2$ . De plus, il faut un comparateur « positif » (non pas un comparateur négatif, comme celui vu dans le chapitre précédent) ou non inverseur pour que le basculement puisse exister. La tension  $U_1$  doit diminuer lorsque le comparateur a une sortie à  $+V_{\text{sat}}$ . Enfin, concernant l'intégrateur, la durée de commutation doit être très courte devant la période  $T$  sinon des problèmes liés au « slew rate » peuvent apparaître.

**Propriété 3.2. Génération de signaux triangulaires ou carrés**

Dans ce cas, ce système permet, selon la tension observée, de générer des signaux périodiques non sinusoïdaux carrés ou triangles.

# ENTRAÎNEMENTS

## Exercices d'entraînement

### EXERCICE 1 L'oscillateur à résistance négative

●○○ 20 min.

Considérons le circuit décrit figure 3.9. On admet que l'ALI est idéal et fonctionne en régime linéaire.

1. Donner la relation entre la tension  $v_-$  à l'entrée du bloc « résistance négative » en fonction du courant  $i$ . Justifier la dénomination de ce bloc.
2. En déduire l'équation différentielle vérifiée par  $U(t)$ . Que permet physiquement le bloc à résistance négative ?
3. Quel phénomène est responsable de la stabilisation des oscillations ? Quelle est alors la nouvelle équation différentielle vérifiée par  $U(t)$  ? Pour quelle valeur de  $i(t)$  ce seuil est-il atteint ?
4. Par analogie avec l'oscillateur à pont de Wien étudié dans la section Méthodes, comment faut-il choisir  $R$  pour avoir une oscillation la plus sinusoïdale possible ?

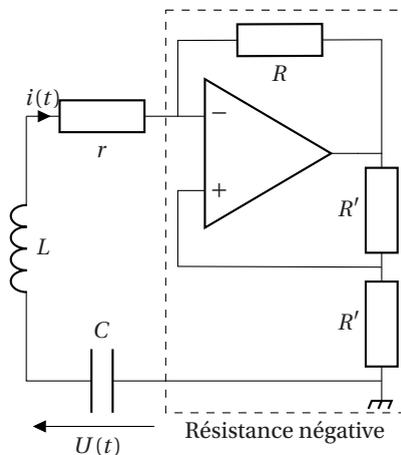
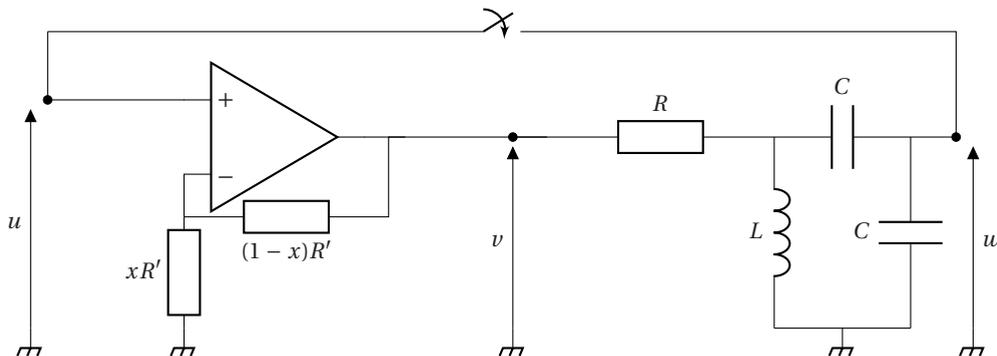


Figure 3.9. Circuit de l'oscillateur à résistance négative.

### EXERCICE 2 Oscillateur à ALI

●●○ 30 min.

On considère un montage à ALI supposé idéal intégrant un potentiomètre de résistance totale  $R'$ , une résistance  $R$ , une inductance  $L$  et deux condensateurs  $C$ .





# PRÉPAS SCIENTIFIQUES PSI/PSI\*

CONFORME AU  
NOUVEAU  
PROGRAMME

## Physique

**Un entraînement intensif aux épreuves de concours pour être prêt le jour J**

→ **RAPPELS DE COURS**

Toutes les **notions essentielles** à acquérir pour mieux appréhender les exercices

→ **FICHES MÉTHODES**

Pour maîtriser les **techniques et astuces** de résolution des exercices

→ **ENTRAÎNEMENT INTENSIF**

Plus de **150 exercices type concours** pour s'entraîner progressivement, se mettre en situation d'épreuve et être prêt le jour J

→ **TOUS LES CORRIGÉS DÉTAILLÉS**

Pour **comprendre** les étapes de résolution des exercices et **acquérir** les bons réflexes

**Toutes les thématiques indispensables abordées :**

- Électronique
- Conversion de puissance
- Transport
- Ondes
- Bilans macroscopiques
- Pratique des techniques expérimentales
- Électromagnétisme



**OFFERT EN LIGNE**

- ▶ **Toutes les fiches méthodes à télécharger** pour une révision nomade avant les épreuves

**Des auteurs au cœur de l'enseignement et des attentes des élèves en CPGE**

**Dans la même collection**



Retrouvez notre collection  
complète ici :



ISBN : 978-2-311-21300-3



9 782311 213003

38,90 €