

ANNALES DES CONCOURS

PSI
Physique · Modélisation · Chimie
2016

Sous la coordination de

Julien DUMONT

Professeur en CPGE

Ancien élève de l'École Normale Supérieure (Cachan)

Vincent FREULON

Professeur en CPGE

Ancien élève de l'École Normale Supérieure (Ulm)

Alexandre HERAULT

Professeur en CPGE

Ancien élève de l'École Normale Supérieure (Cachan)

Par

Julien DUMONT
Professeur en CPGE

Vincent FREULON
Professeur en CPGE

Alexandre HERAULT
Professeur en CPGE

Augustin LONG
ENS Lyon

Guillaume MAIMBOURG
ENS Cachan

Tom MOREL
Professeur en CPGE

Cyril RAVAT
Professeur en CPGE

Sylvie SU
ENS Lyon

Vincent WIECZNY
ENS Lyon

Sommaire

		Énoncé	Corrigé
E3A			
Physique et Modélisation	Étude des caractéristiques d'un robot autonome. <i>ondes sonores, électricité, conversion d'énergie, programmation</i>	11	29
Physique et Chimie	Citerne de gazole et chimie des carburants. <i>électrostatique, électronique, mécanique des fluides, solutions aqueuses, cinétique chimique, oxydoréduction, diagrammes E-pH, thermodynamique</i>	49	65
CONCOURS COMMUNS POLYTECHNIQUES			
Physique et Chimie	Utilisation des métaux, corrosion et contrôle non destructif. <i>électromagnétisme, électrocinétique, cristallographie, diagrammes E-pH, solutions aqueuses, oxydoréduction</i>	83	99
Modélisation et Ingénierie numérique	Suspension magnétorhéologique. <i>sciences de l'ingénieur, mécanique des fluides, magnétostatique</i>	115	134

CENTRALE-SUPÉLEC

Physique et Chimie 1	Étude d'une pompe d'alimentation d'eau. <i>mécanique des fluides, électromagnétisme</i>	147	155
Physique et Chimie 2	Le chlorure de sodium, un sel courant pour de nombreuses applications. De la cuisson des œufs. <i>solutions aqueuses, oxydoréduction, diagrammes E-pH, courbes courant-potentiel, thermodynamique, diffusion thermique</i>	169	176

MINES-PONTS

Physique 1	Le Millenium Bridge. <i>mécanique du point, ondes</i>	193	200
Physique 2	Mesures de champs magnétiques. <i>mécanique du solide, électromagnétisme, électronique</i>	213	220
Chimie	Le béton. <i>cristallographie, solutions aqueuses, oxydoréduction, diagrammes E-pH, courbes courant-potentiel, thermodynamique</i>	237	245

FORMULAIRES

Constantes chimiques	255
Constantes physiques	258
Formulaire d'analyse vectorielle	259
Classification périodique	263

Sommaire thématique de chimie

2015 – 2016

e3a PSI Physique et Chimie		•	•	•	•		••				
CCP MP Physique et Chimie	••	•	•	•	••	•	••				
CCP PC Chimie	••	•	•	•			••	•	••	••	•
CCP PC Modélisation Phys-Chimie											
CCP PSI Physique et Chimie	•	•		••	•	•					
Centrale MP Physique et Chimie 1	•										
Centrale MP Physique et Chimie 2	•	•	•	••	•	••	•				
Centrale PC Chimie	•		•	••	••	•			••	••	•
Centrale PSI Physique et Chimie 1	•			•							
Centrale PSI Physique et Chimie 2		•		•	•	•	•				
Mines MP Chimie	••	••		••	•	••	••				
Mines PC Chimie		•	••	•	•		•		••		
Mines PSI Chimie	••	••		••	•	••	••				
X/ENS PC Chimie			•	••			••	•	••	•	
	Cristallographie	Solutions aqueuses	Cinétique chimique	Oxydoréduction	Diagrammes E-pH	Courbes courant-potentiel	Thermodynamique	Mélanges binaires	Chimie organique	Orbitales moléculaires	Chimie de coordination



CONCOURS ARTS ET MÉTIERS ParisTech - ESTP - POLYTECH

Épreuve de Physique - Modélisation PSI

Durée 3 h

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est autorisé.

AVERTISSEMENT

Remarques préliminaires importantes : il est rappelé aux candidat(e)s que

- Les explications des phénomènes étudiés interviennent dans la notation au même titre que les développements analytiques et les applications numériques ; les résultats exprimés sans unité ne seront pas comptabilisés.
- Tout au long de l'énoncé, les paragraphes en italiques ont pour objet d'aider à la compréhension du problème.
- Tout résultat fourni dans l'énoncé peut être admis et utilisé par la suite, même s'il n'a pas été démontré par le(la) candidat(e).
- La lecture ou l'écriture de programme peut se faire aussi bien en python qu'en scilab. Une annexe syntaxique python scilab est présente en fin d'épreuve.

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction**, la **clarté et la précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans l'**appréciation des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Il est interdit aux candidats de signer leur composition ou d'y mettre un signe quelconque pouvant indiquer sa provenance.

« Un robot est une machine équipée de capacités de perception, de décision et d'action qui lui permettent d'agir de manière autonome dans son environnement en fonction de la perception qu'il en a. » David Filliat – ENSTA ParisTech

La robotique est donc un très bon exemple de domaine pluridisciplinaire qui implique de nombreuses thématiques. Le but de ce problème est **d'étudier quelques caractéristiques d'un robot autonome**. Il comporte deux volets : le premier étudie les propriétés de la télémétrie par ultrasons et le second a pour but de déterminer les principaux paramètres physiques du moteur qui alimente le robot.

PREMIERE PARTIE TÉLÉMÉTRIE PAR ULTRASONS

A / DÉTECTEUR À ULTRASONS

La recherche du maximum d'information sur l'environnement est une quête perpétuelle en robotique.

Pour se faire, la télémétrie, qui consiste à mesurer des distances, est extrêmement importante. Elle permet au robot de déterminer la position des obstacles (ou leur absence) et ainsi de prendre la décision adéquate.

Dans un premier temps, on compare à l'aide du Cahier Technique suivant deux types de télémétrie.

Les différentes technologies de détecteurs

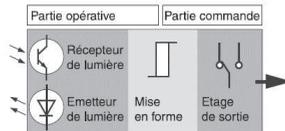
A. Les détecteurs photoélectriques

Leur principe les rend aptes à détecter tous types d'objets, qu'ils soient opaques, réfléchissants ou même quasi-transparents.

Principe : Une diode électroluminescente (LED) émet des impulsions lumineuses, généralement dans l'infrarouge proche (850 à 950 nm). Cette lumière est reçue ou non par une photodiode ou un phototransistor en fonction de la présence ou l'absence d'un objet à étudier.

Il existe différents systèmes de détection, le système à réflexion directe (sur l'objet) consiste par exemple, à utiliser la réflexion directe (diffuse) de l'objet à détecter.

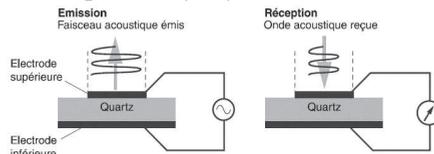
Points faibles : la distance de détection de ce système est faible (jusqu'à 2 m). De plus elle varie avec la couleur de l'objet à « voir » et du fond dans lequel il se trouve (pour un réglage donné, la distance de détection est plus grande pour un objet blanc que pour un objet gris ou noir) et un arrière-plan plus clair que l'objet à détecter peut rendre le système inopérant.



Principe d'un détecteur photoélectrique

B. Les détecteurs à ultrasons

Les ultrasons sont produits électriquement à l'aide d'un transducteur électroacoustique (effet piézoélectrique) qui convertit l'énergie électrique qui lui est fournie en vibrations mécaniques.



Principe d'un transducteur électroacoustique

Le principe est de mesurer le temps de propagation entre le capteur et la cible. L'avantage des capteurs ultrasons est de pouvoir fonctionner à grande distance (jusqu'à 10 m), mais surtout d'être capable de détecter tout objet réfléchissant le son indépendamment de la forme et de la couleur.

Facteurs d'influence : les détecteurs à ultrasons sont particulièrement adaptés à la détection d'objet dur et présentant une surface plane et perpendiculaire à l'axe de détection. Cependant le fonctionnement du détecteur à ultrasons peut être perturbé par différents facteurs :

- Les courants d'air brusques et de forte intensité peuvent accélérer ou dévier l'onde acoustique.
- Les gradients de température importants dans le domaine de détection : une forte chaleur dégagée par un objet crée des zones de température différentes qui modifient le temps de propagation de l'onde et empêchent une détection fiable.
- Les isolants phoniques : les matériaux tels le coton, les tissus, le caoutchouc, absorbent le son.
- L'angle entre la face de l'objet à détecter et l'axe de référence du détecteur.

Cahier Technique Schneider Electric n°209

Pour choisir la solution la plus adaptée à l'utilisation du robot autonome, on choisit de présenter les principaux avantages et inconvénients des deux solutions dans un tableau.

	Ultrason	Infrarouge
Portée	Abordé dans la question A1	Abordé dans la question A1
Nature des matériaux compatibles	Abordé dans la question A2	Abordé dans la question A2
Facteurs d'influence	Abordé dans la question A3	Abordé dans la question A3
Directivité	Les ultrasons sont très évasifs (cône d'émission large d'environ 30°), ce qui peut être un avantage (détection d'obstacle rapprochée) ou un inconvénient (détection d'obstacles sur les côtés alors que la route en face est dégagée).	La directivité est très précise (cône d'émission d'environ 5°).
Coût	Quelques dizaines d'euros	Quelques dizaines d'euros

A1. À l'aide des informations apportées par ce Cahier Technique, comparer les portées de ces deux détecteurs.

A2. Comparer les capacités de détection des deux capteurs en fonction de la nature du matériau et de la couleur de l'obstacle.

A3. Relever au moins un facteur d'influence perturbant la détection par ultrasons et un perturbant la détection par infrarouges.

Pour produire les ultrasons, on utilise l'effet piézoélectrique inverse que possède une lame de quartz. Si ses deux faces sont soumises à une tension alternative de haute fréquence f_0 , soit $u_0(t) = U_0 \cos(2\pi f_0 t)$, elle se met à vibrer à la même fréquence f_0 , ce qui engendre une onde ultrasonore dans le milieu environnant.

A4. Pour obtenir des ultrasons, donner l'ordre de grandeur caractéristique de la fréquence f_0 de la tension alternative à laquelle il faut soumettre la lame de quartz. On précisera les limites du domaine des fréquences des signaux acoustiques audibles par l'homme.

A5. Quel est le nom du phénomène physique à l'origine de l'élargissement des ondes émises ? Dans le tableau, ce phénomène est caractérisé par le cône d'émission. Quelle(s) est (sont) le(s) grandeur(s) physique(s) qui permettent d'expliquer l'écart entre les cônes d'émission ?

A6. Nommer un autre exemple d'utilisation de détecteurs par ultrasons, ainsi qu'un autre exemple d'utilisation de détecteurs infrarouges.

e3a Physique et Modélisation PSI 2016 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Cyril Ravat (Professeur en CPGE) ; il a été relu par Virgile Andreani (ENS Ulm) et Stéphane Ravier (Professeur en CPGE).

Cette épreuve s'intéresse à deux aspects du fonctionnement d'un robot capable de se déplacer de façon autonome : la détection des obstacles sur son chemin et l'utilisation d'un moteur à courant continu.

- La première partie étudie la télémétrie par ultrasons en quatre sous-parties à forte dominante physique. Elle commence par une analyse documentaire permettant de comparer deux techniques de détection, l'une utilisant les ultrasons, l'autre les infrarouges. Elle se poursuit par une étude de la propagation des ondes sonores, comprenant à la fin quelques questions sur l'implémentation informatique de l'influence de la température sur les mesures. On aborde ensuite rapidement les problèmes de réflexion et de transmission des ultrasons aux interfaces, avant de conclure sur le traitement électronique des informations dans les signaux obtenus.
- La deuxième partie aborde, avec de nombreuses questions d'informatique, le fonctionnement et la caractérisation d'une machine à courant continu à travers trois essais expérimentaux, les mesures et les traitements associés. Le premier essai est à rotor bloqué et permet de mesurer les propriétés électriques de la machine. Le deuxième essai, à vide, détermine la constante reliant les grandeurs électrique et mécanique. On termine par un essai de lâché qui permet d'obtenir la valeur du moment d'inertie. Le traitement des erreurs de mesure et des incertitudes est longuement abordé.

Ce sujet est progressif et plutôt bien écrit, quoiqu'un peu long. Les questions de physique et de modélisation sont correctement proportionnées. L'ensemble reste d'une difficulté moyenne avec des questions qui s'enchaînent de façon claire et sans développement mathématique trop important. Il s'agit donc d'un bon sujet de révision, en particulier sur le maniement des incertitudes.

INDICATIONS

Partie B

- B3 L'approximation acoustique permet de négliger les termes d'ordre supérieur à 1, tel que $\mu_1 \cdot v_1$.
- B7 Dans le cadre de l'approximation acoustique, on peut écrire un développement limité au premier ordre de μ en fonction de p .
- B9 Utiliser une loi de Laplace. La dériver ou utiliser la différentielle logarithmique.
- B11 Linéariser l'expression autour de T_{273} . Penser à vérifier à la fin que les valeurs numériques sont cohérentes.
- B12 Chercher à exprimer l'écart en fonction du temps de parcours puis simplifier cette expression, afin de l'identifier à celle présente dans le script.

Partie C

- C5 Calculer les vecteurs de Poynting puis appliquer la définition des coefficients.
- C7 Le milieu le mieux détecté est celui qui réfléchit le plus les signaux, donc qui les transmet le moins.

Partie D

- D2 La vitesse de la particule du fluide est la somme des vitesses correspondant aux deux ondes. Il faut trouver à quelle position est située l'interface.
- D5 Regarder les questions D6 et D7 pour avoir une idée des traitements à mettre en œuvre. Dériver un cosinus conduit notamment à le multiplier par la pulsation.

Partie E

- E1 Lorsque le rotor est bloqué, la vitesse de rotation du moteur est nulle.
- E3 Penser que la résistance du circuit est très faible.
- E5 Ne pas oublier de transformer les chaînes de caractères en valeurs numériques (voir l'annexe pour trouver la bonne fonction).
- E8 La fonction *moyenne* permet de simplifier la réponse ; il faut l'utiliser avant la boucle pour accélérer le calcul.
- La relation entre l'incertitude-type et l'écart-type est

$$u_A(R) = \frac{\sigma(R)}{\sqrt{N}}$$

Partie F

- F2 Les incertitudes de construction sont souvent considérées comme correspondant à une loi de probabilité rectangulaire de largeur $2 \Delta E$:

$$u_s = \frac{\Delta E}{\sqrt{3}}$$

- F3 Dériver S par rapport à ϕ et annuler cette dérivée.
- F5 « Vérifier au sens strict » signifie retourner une valeur booléenne, sans avoir besoin de compter le nombre de valeurs concernées. L'algorithme et la fonction demandés correspondent bien à deux questions différentes.

Partie G

- G1 Utiliser le théorème du moment cinétique scalaire. Remarquer que le régime transitoire semble linéaire.

TÉLÉMÉTRIE PAR ULTRASONS

A. DÉTECTEUR À ULTRASONS

A1 D'après le cahier technique donné, les portées sont de **2 m pour les détecteurs photoélectriques** et **10 m pour les détecteurs à ultrasons**.

A2 Pour les détecteurs photoélectriques, il n'y a pas de différence de détection en fonction de la nature des matériaux, mais un contraste important est nécessaire entre la couleur de l'objet et le fond.

Pour les détecteurs à ultrasons, les objets présentant des surfaces absorbant les sons (isolants phoniques tels que coton, tissus, caoutchouc...) sont plus difficiles à détecter. Les couleurs ne modifient pas la détection.

A3 Exemple de facteurs extérieurs perturbant la détection :

- dans le cas d'un détecteur photoélectrique, un arrière-plan plus clair que l'objet ;
- avec un détecteur à ultrasons, des courants d'air brusques ou un gradient de température important.

A4 Les signaux audibles par l'homme ont des fréquences comprises entre 20 Hz et 20 kHz. Il faut donc

$$f_0 > 20 \text{ kHz}$$

A5 Le phénomène qui élargit les ondes émises est la diffraction. Le cône de diffraction est classiquement défini par

$$\sin \theta = \frac{\lambda}{d}$$

où θ est la moitié de l'angle du sommet du cône et d la taille de l'émetteur. La longueur d'onde des ultrasons à 20 kHz et se déplaçant à environ $400 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ est de l'ordre de 2 cm, ce qui est très supérieur à la longueur d'onde des rayonnements infrarouges (900 nm).

Pour les ultrasons, avec $\lambda = 2 \text{ cm}$ et $\theta = 15^\circ$, on trouve $d = 8 \text{ mm}$, ce qui peut correspondre à la taille du transducteur piézoélectrique. On trouve pour la diode infrarouge une largeur de $20 \mu\text{m}$.

A6 Les détecteurs à ultrasons sont utilisés dans les sonars des sous-marins, pour le contrôle non destructif (recherche de fissures à l'intérieur de pièces usinées) mais aussi dans le domaine médical pour les échographies classiques ou dites « doppler » (mesure de la vitesse des flux sanguins).

En ce qui concerne l'utilisation des détecteurs à infrarouges, citons les appareils à vision nocturne ou utilisant la télégraphie, les missiles téléguidés, les communications sans fil comme celles des télécommandes, ou encore les détecteurs de présence dans les maisons.

B. CÉLÉRITÉ DE L'ONDE ULTRASONORE

B1 L'équation d'état des gaz parfaits, exprimée à l'aide de la masse volumique $\mu = m/V$, devient

$$p = \frac{\mu R T_0}{M_a}$$

Ainsi,
$$p = P_0 + p_1(x, t) = \frac{\mu_0 R T_0}{M_a} + \frac{\mu_1 R T_0}{M_a}$$

et par conséquent
$$p_1(x, t) = \frac{\mu_1 R T_0}{M_a}$$

Dans le cadre de l'approximation acoustique,

$$|p_1(x, t)| \ll P_0 \implies \mu_1 \ll \mu_0$$

B2 Le volume $d\tau = S dx$ a pour masse

$$dm(t) = \mu(x, t) S dx \quad \text{et} \quad dm(t + dt) = \mu(x, t + dt) S dx$$

B3 La masse δm_e entre dans le volume $d\tau$ à la vitesse $v(x, t) = v_1(x, t)$:

$$\delta m_e = \mu(x, t) v_1(x, t) S dt$$

De même, la masse δm_s sort du volume $d\tau$ à la vitesse $v_1(x + dx, t)$:

$$\delta m_s = \mu(x + dx, t) v_1(x + dx, t) S dt$$

Dans le cadre de l'approximation acoustique, on ne garde que les termes d'ordre égal au plus à un : le produit μv_1 est donc assimilable à $\mu_0 v_1$. On obtient alors

$$\delta m_e = \mu_0 v_1(x, t) S dt \quad \text{et} \quad \delta m_s = \mu_0 v_1(x + dx, t) S dt$$

B4 La conservation de la matière au sein du volume $d\tau$ permet d'écrire

$$\begin{aligned} dm(t + dt) - dm(t) &= \delta m_e - \delta m_s \\ [\mu(x, t + dt) - \mu(x, t)] S dx &= [v_1(x, t) - v_1(x + dx, t)] \mu_0 S dt \end{aligned}$$

Or $\mu(x, t + dt) - \mu(x, t) = \mu_1(x, t + dt) - \mu_1(x, t)$. On obtient ainsi

$$\frac{\mu_1(x, t + dt) - \mu_1(x, t)}{dt} = \mu_0 \frac{v_1(x, t) - v_1(x + dx, t)}{dx}$$

soit

$$\frac{\partial \mu_1}{\partial t} + \mu_0 \frac{\partial v_1}{\partial x} = 0 \tag{R1}$$

B5 En une dimension, le gradient vaut

$$\overrightarrow{\text{grad}} p(x, t) = \frac{\partial p(x, t)}{\partial x} \overrightarrow{e_x} = \frac{\partial (P_0 + p_1(x, t))}{\partial x} \overrightarrow{e_x} = \frac{\partial p_1(x, t)}{\partial x} \overrightarrow{e_x}$$

De plus, la dérivée de v est égale à celle de v_1 ; le produit avec μ devant rester de premier ordre d'après l'approximation acoustique,

$$\mu \frac{\partial \overrightarrow{v}}{\partial t} = \mu_0 \frac{\partial v_1}{\partial t} \overrightarrow{e_x}$$

e3a Physique et Chimie PSI 2016 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Julien Dumont (Professeur en CPGE) et Vincent Wieczny (ENS Lyon) ; il a été relu par Cyril Ravat (Professeur en CPGE) et Alexandre Herault (Professeur en CPGE).

Le sujet est composé de trois problèmes indépendants, deux de physique et un de chimie.

- Le premier problème de physique porte sur l'étude d'un capteur capacitif utilisé pour déterminer le niveau de gazole dans une citerne. Ce problème, très proche du cours d'électrostatique, permet de vérifier si le cours est bien assimilé tout en proposant une application concrète.
- Le second problème de physique étudie la vidange d'une telle citerne. La relation de Bernoulli étant donnée, on construit progressivement les éléments permettant d'évaluer le temps de cette vidange.
- La dernière partie a pour thème la chimie des carburants. L'étude commence par le cas idéal d'une combustion complète du gazole, permettant de confirmer des données numériques issues d'un document en annexe. Néanmoins, la combustion est en pratique incomplète, d'où l'émission de polluants azotés : deux d'entre eux sont abordés pour juger de leur stabilité cinétique ou pour les quantifier à la sortie du pot d'échappement. Les questions sont classiques et certaines applications numériques peuvent être confortées par les données en annexe.

Le sujet est tout à fait adapté à la filière car il couvre des domaines variés du programme tout en restant assez proche du cours et des exercices de base. Sa longueur nécessitait d'avoir de bons réflexes si l'on voulait avancer suffisamment dans le temps imparti. C'est un très bon sujet de révision qui vaut la peine que l'on s'y attarde.

INDICATIONS

Partie I

- A.1 Donner l'équation de Maxwell-Gauss et la combiner avec la relation entre le champ électrique et le potentiel.
- A.5 Il faut utiliser les deux expressions du champ électrique qui ont été établies dans les questions précédentes.
- B.3 Attention aux unités : la formule donne la capacité en pF.
- C.6 Si on veut retenir la valeur moyenne, il faut utiliser un filtre ne retenant que la composante continue : c'est un filtre passe-bas.
- C.10 Calculer l'atténuation due au filtre qui s'applique à la première harmonique.

Partie II

- D.4 Effectuer une intégration par séparation de variables.
- F.1 De nombreuses questions de cette partie sont indépendantes et sont uniquement des applications numériques. Ne pas hésiter à en sauter certaines.
- G.1 Attention à bien compter deux coudes brusques. Les formules donnant les valeurs numériques des coefficients sont indiquées dans l'annexe.

Partie III

- H.1 Une réaction de combustion complète ne produit que du dioxyde de carbone $\text{CO}_{2(g)}$ et de la vapeur d'eau $\text{H}_2\text{O}_{(g)}$.
- H.3 Déterminer les nombres d'oxydation moyens de l'élément carbone au sein des espèces carbonées pour déterminer leur nature oxydante ou réductrice.
- H.5 Calculer la constante d'équilibre de la réaction de combustion complète du gazole.
- H.7 Montrer en quoi les hypothèses auxquelles on fait appel pour le calcul de température de flamme ne sont pas vérifiées.
- I.6 Une réaction d'oxydoréduction est considérée comme quantitative dès lors que la différence de potentiel entre les deux couples est supérieure à 0,25 V.
- I.7 La couleur absorbée est complémentaire de la couleur observée en solution.
- I.9 Passer en quantité de matière pour trouver à la concentration massique initiale en pentaoxyde de diazote $\text{N}_2\text{O}_{5(g)}$.

I. CAPTEUR DE NIVEAU

A.1 Le champ électrique \vec{E} dérive du potentiel V qui ne dépend, d'après l'énoncé, que de x entre les armatures. On sait de plus que l'espace est vide de charges électriques, ainsi l'équation de Maxwell-Gauss et la relation champ-potential s'écrivent

$$\operatorname{div} \vec{E} = 0 \quad \text{et} \quad \vec{E} = -\vec{\operatorname{grad}} V$$

soit

$$\Delta V = 0$$

Autrement dit

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = 0$$

A.2 En intégrant deux fois, on obtient

$$V(x) = c_1 x + c_2$$

où c_1 et c_2 sont des constantes d'intégration. Or,

$$V(0) = c_2 = V_1 \quad \text{et} \quad V(e) = c_1 e + c_2 = V_2$$

soit

$$c_2 = V_1 \quad \text{et} \quad c_1 = \frac{V_2 - V_1}{e}$$

et finalement

$$V(x) = \frac{V_2 - V_1}{e} x + V_1$$

A.3 En utilisant la relation indiquée à la question A.1, on a

$$\vec{E} = -\vec{\operatorname{grad}} V = -\frac{\partial V}{\partial x} \vec{e}_x$$

et donc

$$\vec{E} = -\frac{V_2 - V_1}{e} \vec{e}_x$$

Il s'agit donc d'un **champ uniforme** (c'est-à-dire indépendant de la position dans l'espace, ici la variable x) dont **les lignes de champs sont des droites parallèles à \vec{e}_x** . Si $V_1 > V_2$, ces lignes de champs sont orientées depuis la plaque de potentiel V_1 vers celle de potentiel V_2 .

A.4 Considérons un cylindre C d'axe (Ox) , dont l'une des bases est positionnée à une abscisse x comprise entre 0 et e et l'autre à une abscisse négative. Notons S_b la surface de cette base ($S+$ pour celle située à l'abscisse positive, $S-$ à l'abscisse négative, avec bien entendu $S+ = S- = S_b$) et L la surface latérale. Décomposons le flux du champ \vec{E} à travers la surface totale de ce cylindre, qui est une surface fermée.

$$\Phi_C(\vec{E}) = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iint_{S-} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \iint_{S+} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \iint_L \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

Or, les lignes de champ électrique sont colinéaires à \vec{e}_x , ce qui signifie qu'elles sont perpendiculaires à $d\vec{S}$ sur toute la surface latérale du cylindre: le produit scalaire est donc nul. Le champ étant nul sur la base $S-$ d'après l'énoncé, il ne reste que l'intégrale sur $S+$. Sur cette base, le champ est constant puisque tous les points de la surface sont à une même valeur de x ; de plus, $d\vec{S}$ est alors colinéaire avec le champ. Finalement

$$\Phi_C(\vec{E}) = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iint_{S+} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iint_{S+} E(x) dS = E(x) \iint_{S+} dS = E S_b$$

Le théorème de Gauss affirme que ce flux vaut la charge contenue dans le cylindre divisée par la permittivité électrique du milieu. La plaque située en $x = 0$ porte la charge surfacique $\sigma = Q_1/S$; par conséquent la charge contenue dans le cylindre vaut

$$Q_{\text{in}} = \sigma S_b = \frac{Q_1 S_b}{S}$$

soit

$$S_b E = \frac{S_b Q_1}{S \varepsilon_0}$$

donc

$$\boxed{\vec{E} = \frac{Q_1}{S \varepsilon_0} \vec{e}_x}$$

Il est amusant de remarquer que la forme de la surface de base n'importe pas dans la démonstration. En effet, le flux latéral reste nul et l'intégrale sur $S+$ ne dépend que de la valeur de la surface et non de sa forme. On peut donc tout à fait prendre une surface de base ayant la forme d'un carré, d'un triangle, d'une banane, d'un éléphant... et obtenir le résultat.

A.5 En utilisant les résultats des questions A.3 et A.4, on parvient à

$$-\frac{V_2 - V_1}{e} = \frac{Q_1}{S \varepsilon_0}$$

autrement dit

$$Q_1 = \frac{\varepsilon_0 S}{e} (V_1 - V_2)$$

Or, par définition de la capacité C d'un condensateur, on a la relation

$$Q_1 = CU = C(V_1 - V_2)$$

soit par identification

$$\boxed{C = \frac{\varepsilon_0 S}{e}}$$

B.1 Deux condensateurs en parallèle sont soumis à la même tension U (puisqu'elle se conserve en dérivation). Soit Q_1 et Q_2 les charges portées respectivement par les armatures des condensateurs C_1 et C_2 . On a

$$Q_1 = C_1 U \quad \text{et} \quad Q_2 = C_2 U$$

La charge totale portée est $Q = Q_1 + Q_2$, soit

$$Q = CU = C_1 U + C_2 U = (C_1 + C_2)U$$

La capacité du condensateur équivalent à deux condensateurs en parallèle est la somme de leurs capacités.

B.2 Le condensateur constitué par le système étudié est équivalent à la mise en parallèle de deux condensateurs plan, de capacités respectives d'après l'énoncé

$$C_{\text{air}} = \frac{\varepsilon_0 (H - h)L}{e} \quad \text{et} \quad C_{\text{gazole}} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r hL}{e}$$

La difficulté de cette question est de bien calculer les surfaces totales des armatures correspondant aux deux condensateurs plans étudiés.

Notons également que l'expression proposée au début de cette partie pour la capacité permet de confirmer le résultat obtenu à la question A.5.

D'après la question B.1, la capacité recherchée est la somme de ces deux capacités.

$$\boxed{C(h) = \frac{\varepsilon_0 L}{e} ((H - h) + \varepsilon_r h)}$$

CCP Physique et Chimie PSI 2016 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Augustin Long (ENS Lyon) et Tom Morel (Professeur en CPGE) ; il a été relu par Fabrice Maquère (Professeur agrégé), Sylvie Su (ENS Lyon) et Stéphane Ravier (Professeur en CPGE).

Le sujet se compose de trois grandes parties. La première est consacrée à la chimie, la deuxième à la physique et la troisième propose des questions de culture et d'analyse sur les différents phénomènes abordés au cours du sujet.

- La partie de chimie propose des questions classiques de cristallographie, suivies de l'étude d'un phénomène de corrosion uniforme. La protection du fer par anode sacrificielle à base de magnésium est alors évoquée, ce qui permet d'introduire des questions usuelles d'électrochimie (diagramme E-pH et corrosion humide).
- La deuxième partie est consacrée à l'étude du dispositif de contrôle non destructif par courants de Foucault. Dans un premier temps, on détermine les paramètres d'une bobine lors du couplage avec une plaque métallique. Puis on calcule l'expression du champ magnétique au voisinage de cette plaque. Enfin, on étudie le montage électronique de détection des courants de Foucault. Toute cette partie s'appuie essentiellement sur des notions d'électromagnétisme et d'électrocinétique.
- La troisième partie contient des questions de culture et d'analyse en lien avec les sujets abordés. La corrosion et l'étude des différents matériaux utilisés dans l'industrie et dans la vie courante représente les deux tiers de ces questions. Le dernier tiers se réfère à la partie physique et à la détection des défauts créés par la corrosion. Cette partie présente une difficulté originale pour une épreuve de concours avec la limitation du nombre de mots des réponses, imposant au candidat d'être direct.

Le sujet traite différents domaines du programme de première et deuxième années. En chimie, la part d'informations générales et de culture est très importante, en particulier sur la corrosion et les métaux. Si certaines questions sont proches du cours et s'appuient sur des relations assez classiques, pouvant ainsi être traitées rapidement, une grande proportion du sujet de chimie se fonde sur des connaissances générales. En physique, ce sujet ne présente pas de difficulté majeure car les questions abordées sont assez proches des raisonnements du cours, et peut servir de sujet de révision en électromagnétisme.

INDICATIONS

Chimie

- 1 Exprimer le contact des atomes sphériques le long de la diagonale.
- 2 Les masses volumiques des métaux sont de l'ordre de la tonne par mètre cube.
- 3 Faire l'application numérique dans les unités du système international avant de faire les conversions pour obtenir K avec les unités demandées.
- 7 Comparer les potentiels standards pour identifier la cathode et l'anode.

Physique

- 9 Utiliser la loi d'Ohm locale

$$\vec{j}_e = \gamma \vec{E}$$

- 14 La norme du champ magnétique ne doit pas diverger à l'infini. Noter que

$$j = \left(\frac{1+j}{\sqrt{2}} \right)^2$$

- 15 Repasser en notation réelle pour exprimer la puissance volumique dissipée par effet Joule $\vec{j}_e \cdot \vec{E}$.
- 17 Écrire la loi d'Ohm pour la résistance R_1 :

$$\underline{V}^- - \underline{u}_A = R_1 \underline{i}(t)$$

- 18 Intervertir V^+ et V^- revient à changer K_0 en $-K_0$.
- 22 La bobine 2 est en circuit ouvert donc $\underline{i}_2 = 0$.
- 24 Le plateau de chaque courbe correspond à F_0 .

Analyses des phénomènes physiques et chimiques

- 26 L'argent et l'or sont des métaux dont le potentiel standard est positif.
- 28 Comparer les conductivités thermiques λ et les perméabilités magnétiques μ .
- 29 Penser à l'aspect de la rouille sur des matériaux en fer.

CHIMIE

1 Comme chaque atome au sommet d'une maille appartient à 8 mailles cubiques, chacun compte pour $1/8$. L'atome au centre appartient à cette maille seulement. Il y a donc $8 \times 1/8 + 1 = 2$ atomes par maille.

Dans la structure cubique centrée, les sphères des atomes sont en contact le long de la diagonale du cube, qui vaut $a\sqrt{3}$. On a donc

$$a\sqrt{3} = 4 R_{\text{Fe}}$$

2 Comme il y a deux atomes par maille, la masse d'une maille notée m_{maille} s'écrit

$$m_{\text{maille}} = \frac{2 M_{\text{Fe}}}{N_{\text{A}}}$$

Par ailleurs la masse volumique ρ_{Fe} s'écrit

$$\rho_{\text{Fe}} = \frac{m_{\text{maille}}}{a^3}$$

soit

$$\rho_{\text{Fe}} = \frac{2 M_{\text{Fe}}}{N_{\text{A}} \left(\frac{4}{\sqrt{3}} R_{\text{Fe}} \right)^3} = \frac{3\sqrt{3} M_{\text{Fe}}}{2^5 N_{\text{A}} R_{\text{Fe}}^3}$$

Pour les métaux, la masse volumique est de l'ordre de 10^3 à $10^4 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$, comme on peut le voir en annexe pour le cuivre. On a alors

$$n = 3 \quad \text{et} \quad \rho_{\text{Fe}} = 7,9 \cdot 10^3 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$$

3 La masse $m(t)$ de métal corrodé à l'instant t est liée à la masse volumique du métal X par la relation

$$m(t) = \rho_{\text{X}} V_{\text{corr}}(t)$$

où $V_{\text{corr}}(t)$ est le volume de métal corrodé à l'instant t . Comme la corrosion est uniforme sur la surface S, on a $V_{\text{corr}}(t) = S e(t)$, soit

$$m(t) = \rho_{\text{X}} S e(t) \tag{1}$$

Notons Q la charge échangée. D'après la demi-équation donnée par l'énoncé, pour une mole de métal X corrodé, 2 moles d'électrons et une mole de cations X^{2+} sont formées. En introduisant la quantité de matière de métal corrodé n_{corr} , on a

$$Q = n_{e^-} \mathcal{F} = 2 n_{\text{corr}} \mathcal{F} = 2 \frac{m(t)}{M_{\text{X}}} \mathcal{F}$$

De plus, comme l'intensité du courant est constante, on a $Q = I_{\text{corr}} t$. On en déduit

$$m(t) = \frac{I_{\text{corr}} M_{\text{X}}}{2 \mathcal{F}} t \tag{2}$$

À partir des équations (1) et (2), et sachant que $I_{\text{corr}} = j S$ puisque la corrosion est uniforme, on obtient

$$v_{\text{corr}} = \frac{e(t)}{t} = \frac{M_{\text{X}} j}{2 \mathcal{F} \rho_{\text{X}}}$$

Par définition, la vitesse de corrosion s'écrit

$$v_{\text{corr}} = \frac{de(t)}{dt}$$

et ici, puisque la corrosion est uniforme, on peut passer de la forme différentielle à la forme intégrée et écrire

$$v_{\text{corr}} = \frac{de(t)}{dt} = \frac{e(t)}{t}$$

Pour le cuivre, on a donc $K_{\text{Cu}} = \frac{v_{\text{corr}}}{j} = \frac{M_{\text{Cu}}}{2 \mathcal{F} \rho_{\text{Cu}}}$

soit
$$K_{\text{Cu}} = \frac{63,5 \cdot 10^{-3}}{2 \times 96500 \times 8900}$$

d'où

$$K_{\text{Cu}} = 3,70 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{A}^{-1} \cdot \text{s}^{-1} = 1,17 \frac{\text{mm} \cdot \text{an}^{-1}}{\text{A} \cdot \text{m}^{-2}}$$

Il faut ici faire les calculs avec les unités du système international, en l'occurrence exprimer les masses en kilogramme, les intensités en ampère, les distances en mètre et le temps en seconde. La constante de Faraday étant donnée en $\text{C} \cdot \text{mol}^{-1}$, les résultats numériques sont obtenus avec la seconde comme unité de temps. Il faut alors convertir les s^{-1} en an^{-1} . Une dernière conversion des mètres en millimètres permet d'obtenir le résultat souhaité, qui vérifie le fait que K est proche de 1 pour le cuivre.

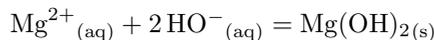
Des ordres de grandeur pour la fonte $j = 10^{-2} \text{ A} \cdot \text{m}^{-2}$ et $K = 1 \frac{\text{mm} \cdot \text{an}^{-1}}{\text{A} \cdot \text{m}^{-2}}$, on déduit

$$v_{\text{corr}} = 10 \mu\text{m} \cdot \text{an}^{-1}$$

Cette vitesse de corrosion est 10 fois supérieure à celle qui est tolérée. La fonte présente donc des **problèmes de corrosion** dès que celle-ci est laissée à l'air libre ou enterrée.

La corrosion du fer et des aciers représente des dépenses considérables pour les pays utilisateurs. Les coûts liés aux dégradations causées par la corrosion s'évaluent à des dizaines de milliards d'euros par an à travers le monde. C'est pourquoi il faut trouver des méthodes de protection contre la corrosion.

4 L'équation de réaction de la précipitation est



et à la limite de précipitation, on a

$$K_s = \frac{[\text{Mg}^{2+}][\text{HO}^{-}]^2}{C^{\circ 3}} \quad \text{avec} \quad C^{\circ} = 1 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

Par hypothèse, on néglige la dilution. Ainsi $[\text{Mg}^{2+}] = [\text{Mg}^{2+}]_0 = 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$. On en déduit

$$[\text{HO}^{-}] = 10^{-4,35} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

et comme $K_e = 10^{-14}$, on trouve

$$[\text{H}_3\text{O}^{+}] = 10^{-9,65} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

soit

$$\text{pH}_1 = 9,65$$

CCP Modélisation et Ingénierie numérique PSI 2016

Corrigé

Ce corrigé est proposé par Julien Dumont (Professeur en CPGE) ; il a été relu par Cyril Ravat (Professeur en CPGE).

Ce sujet évoque différents aspects d'une suspension magnétorhéologique. Composé d'une mise en situation et de trois parties largement indépendantes, il est assez équilibré entre physique et sciences industrielles.

- La première partie se donne pour objectif de modéliser et valider le banc d'essai. Elle ne comporte que 5 questions de mécanique et d'identification de paramètres.
- Le but de la deuxième partie est de modéliser l'écoulement du fluide dans l'amortisseur et de montrer que celui-ci exerce sur la roue une force de type frottement visqueux. La mécanique des fluides et l'électromagnétisme ont ici la part belle, les calculs succédant à des raisonnements qualitatifs et des évaluations d'ordres de grandeur.
- La troisième et dernière partie cherche à caractériser l'influence du courant sur la réponse de la suspension. À partir d'un modèle harmonique, il s'agit essentiellement de lire des diagrammes de Bode ou de réponses indicielles.

Le sujet est assez court mais constitué d'un grand nombre de questions qui appellent pour certaines des réponses d'une page tandis que pour d'autres, une ligne suffit. Il s'agit d'aller vite et de ne pas s'arrêter trop en chemin. Les questions d'identification de paramètres sont nombreuses, celles de mécanique torsorielle quasi absentes. Ce sujet est un peu étrange car il reste finalement superficiel sur la plupart des points qu'il aborde, promettant dans de longues introductions des résultats pratiques intéressants pour finalement ne consister qu'en un relevé de temps de réponse à 5%. Néanmoins, c'est un excellent sujet pour travailler la vitesse, l'efficacité, et apprendre à ne pas s'attarder lorsque l'on bloque. Soulignons enfin que l'énoncé met quasi systématiquement trois chiffres significatifs alors même que les calculatrices étaient interdites : il ne faut donc pas s'attendre à obtenir soi-même une telle précision, mais seulement l'ordre de grandeur de la réponse.

INDICATIONS

- 8 Trouver tout d'abord une expression de $r \frac{dv_z}{dr}$ puis intégrer celle-ci entre r et r_1 .
Utiliser les conditions aux limites pour trouver C_1 et C_2 .
- 12 Il suffit de calculer la résultante des deux forces pressantes s'exerçant sur le piston.
- 13 Les forces de viscosité s'expriment en $\eta \frac{\partial v}{\partial \gamma}$.
- 14 Utiliser les résultats des questions 6 et 10 et ne pas oublier que $\vec{V} = -V_0 \vec{u}_z$.
- 26 Définir le lien entre le flux total et le flux d'une spire. Le lien entre ce flux total et l'inductance est $\Phi_p = Li$.
- 29 Bien définir les surfaces traversées par les différents champs, sachant que celui de B_3 doit sortir et entrer.
- 30 En comparant les perméabilités magnétiques, restreindre le calcul de la circulation sur le contour à celui des entrefers.
- 37 Attention aux graduations en abscisse du relevé proposé.
- 38 D'après le cours, $\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - 2z^2}$.
- 42 L'énoncé ne dit pas jusqu'à quelle profondeur simplifier la fonction de transfert.
L'essentiel est d'être cohérent dans sa réponse.

II. CARACTÉRISATION ET MODÉLISATION DE L'AMORTISSEUR

1 L'énoncé propose de représenter le torseur d'une action mécanique en indiquant les composantes de la résultante.

- La liaison entre 2 et 3 étant une glissière d'axe \vec{e}_z ,

$$\{\mathcal{T}_{2 \rightarrow 3}\} = \left\{ \begin{array}{cc} X_{23} & L_{23} \\ Y_{23} & M_{23} \\ 0 & N_{23} \end{array} \right\}_A$$

- La liaison entre 3 et 4 étant une pivot d'axe \vec{e}_y ,

$$\{\mathcal{T}_{3 \rightarrow 4}\} = \left\{ \begin{array}{cc} X_{34} & L_{34} \\ Y_{34} & 0 \\ Z_{34} & N_{34} \end{array} \right\}_B$$

- La liaison entre 1 et 2 étant une glissière d'axe \vec{e}_z ,

$$\{\mathcal{T}_{1 \rightarrow 2}\} = \left\{ \begin{array}{cc} X_{12} & L_{12} \\ Y_{12} & M_{12} \\ 0 & N_{12} \end{array} \right\}_C$$

- Enfin, le torseur de l'action mécanique de pesanteur sur la caisse s'écrit

$$\{\mathcal{T}_{\text{pesanteur} \rightarrow \text{caisse}}\} = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -mg & 0 \end{array} \right\}_G$$

2 Le principe fondamental de la dynamique appliqué à la caisse en résultante et en projection selon \vec{e}_z conduit à

$$m\ddot{z}_m(t) = -mg - k(z_m(t) - z_r(t)) - c\dot{z}_m(t)$$

que l'on peut éventuellement normaliser par rapport $z_m(t)$ pour obtenir

$$\ddot{z}_m(t) + \frac{c}{m} \dot{z}_m(t) + \frac{k}{m} z_m(t) = -g + \frac{k}{m} z_r(t)$$

3 Avec le changement de variable proposé,

$$\ddot{z}_{m0}(t) + \frac{c}{m} \dot{z}_{m0}(t) + \frac{k}{m} z_{m0}(t) = \frac{k}{m} z_r(t)$$

4 Dans le domaine de Laplace, l'équation différentielle précédente se transforme en

$$p^2 Z_{m0}(p) + p \frac{c}{m} Z_{m0}(p) + \frac{k}{m} Z_{m0}(p) = \frac{k}{m} Z_r(p)$$

c'est-à-dire

$$H(p) = \frac{Z_{m0}(p)}{Z_r(p)} = \frac{\frac{k}{m}}{p^2 + \frac{c}{m} p + \frac{k}{m}}$$

ou encore
$$H(p) = \frac{1}{\frac{m}{k}p^2 + \frac{c}{k}p + 1}$$

ce qui est la forme demandée avec

$$\boxed{K = 1 \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \xi_0 = \frac{c}{2\sqrt{km}}}$$

5 Le module de H est le rapport des amplitudes de Z_{m0} et de Z_r : plus il est faible, plus le mouvement dû à la route est amorti dans l'habitacle. On constate ainsi que les courbes correspondant à une suspension magnétorhéologique sont toujours meilleures que pour une suspension classique, et ce quelle que soit la fréquence. C'est extrêmement visible pour un taux d'amortissement de 0,5 ou 1,5, moins évident sur un taux de 0,16 (mais le système n'est alors presque pas amorti), pour lequel on constate même une résonance.

| Une petite erreur d'énoncé ici place H et non son module en ordonnée.

III. DESCRIPTION DE L'AMORTISSEUR À FLUIDE MAGNÉTORHÉOLOGIQUE

6 Lorsque le piston se déplace, les volumes du haut et du bas de la figure voient leurs valeurs changer. Or, le liquide étant supposé incompressible, cela n'est possible que si la masse de fluide elle-même change. Le déplacement de cette masse est nécessairement en sens inverse au déplacement du piston, puisque le volume vers lequel se déplace le piston diminue. Le débit volumique qui intervient est alors par définition

$$\boxed{D_v = V_0 S_p}$$

7 Les conditions en $r = r_1$ et $r = r_2$ correspondent à celles sur les parois. Or, sur celles-ci, il y a adhérence, la vitesse v est donc nulle.

$$\boxed{v(r_1) = v(r_2) = 0}$$

8 Posons dans un premier temps $K = \Delta P / \eta L$. L'équation proposée se réécrit, en projection selon \vec{u}_z ,

$$\frac{d}{dr} \left(r \frac{dv_z}{dr} \right) = Kr$$

qui s'intègre en

$$r \frac{dv_z}{dr} = \frac{K r^2}{2} + K_1$$

où K_1 est une constante. Une fois que l'on a divisé par r , une seconde intégration entre r et r_1 donne

$$v_z(r) = \frac{K (r^2 - r_1^2)}{4} + K_1 \ln \left(\frac{r}{r_1} \right) + K_2$$

où K_2 est une seconde constante. Or d'après la question précédente la vitesse est nulle pour $r = r_1$, donc $K_2 = 0$. Pour trouver K_1 , il faut utiliser la seconde condition aux limites, $v(r_2) = 0$:

Centrale Physique et Chimie 1 PSI 2016 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Sylvie Su (ENS Lyon) et Julien Dumont (Professeur en CPGE) ; il a été relu par Tom Morel (Professeur en CPGE).

Ce sujet propose d'étudier un système d'alimentation d'eau constitué d'une pompe reliée à un moteur magnétique ainsi que les critères permettant de choisir ce moteur et son fonctionnement.

- Dans la première partie, on s'intéresse à l'écoulement dans des tuyaux réels et plus particulièrement aux pertes de charge dont ils sont le siège. Cette partie est longue et nécessite de bien connaître le cours de mécanique des fluides.
- Dans un deuxième temps, on étudie les caractéristiques d'une pompe centrifuge afin de la choisir pour répondre au cahier des charges d'une installation réelle. Cette partie est originale et intéressante. Elle permet d'appliquer le cours dans un contexte pratique.
- Enfin, on étudie plus précisément le fonctionnement du moteur magnétique synchrone utilisé en association avec la pompe sélectionnée. Cette partie, beaucoup plus proche du cours, nécessite parfois de longs et fastidieux calculs mais balaie une large partie du cours de spé sur la conversion de puissance.

Ce problème intéressant aborde de façon indépendante des notions d'hydrodynamique et de conversion électromagnétomécanique. Il demande également des lectures de courbes et comporte des questions proches du cours mais qui nécessitent quelque réflexion. Ce sujet est le premier à aborder les moteurs synchrones ; il offre donc une occasion rare de travailler et réviser ce chapitre.

INDICATIONS

Partie I

- I.A.1.e Attention à la définition de ΔH , notamment à son signe.
- I.A.2.b Penser aux caractéristiques de l'écoulement pour exprimer $\frac{\partial H}{\partial x}$ en fonction de ΔH et pouvoir utiliser I.A.1.e.
- I.B.1.d De quel régime les valeurs proposées permettent-elles de se rapprocher ?
- I.B.2.b Dans la lecture du diagramme, il faut d'abord calculer le nombre de Reynolds pour se positionner en abscisse, puis le rapport ε/D pour trouver la courbe pertinente à partir de l'axe des ordonnées à droite.

Partie II

- II.A.1 Une explication qualitative suffit.
- II.B.1 Évaluer à partir de la figure 2 le débit maximal que l'on peut obtenir avec une pompe.
- II.B.2 Là encore, il faut exploiter le diagramme de Moody.

Partie III

- III.B.2 Le champ total est obtenu par superposition des champs individuels.
- III.C.2 La question consiste à intégrer la densité volumique d'énergie magnétique dans tout l'entrefer. Elle est très (voire extrêmement) calculatoire.

I. PERTES DE CHARGE DANS LES CONDUITES

I.A.1.a Détaillons les définitions demandées :

- un écoulement parfait est un écoulement pour lequel on peut négliger la viscosité et la diffusion thermique ;
- un écoulement est homogène si ses propriétés macroscopiques ne dépendent pas de la position, alors qu'il est incompressible si la masse volumique d'une particule de fluide est constante au cours de l'écoulement ;
- un écoulement est stationnaire si ses propriétés ne dépendent pas du temps.

I.A.1.b Pour un système ouvert, en régime stationnaire et entre deux points d'un même tube de courant, le premier principe de la thermodynamique s'écrit

$$\Delta(h + e_c + e_p) = w_u + q$$

où h , e_c et e_p désignent respectivement l'enthalpie massique, et les énergies massiques cinétique et potentielle du système. w_u et q sont respectivement le travail utile massique (c'est-à-dire autre que celui des forces pressantes ou conservatives) et le transfert thermique massique. Dans le cas d'un fluide parfait, ces deux dernières grandeurs sont nulles. Sous les hypothèses effectuées, la variation Δu d'énergie interne massique est nulle. Or, celle-ci intervient dans l'expression de la variation d'enthalpie massique, puisque

$$\Delta h = \Delta\left(u + \frac{p}{\rho}\right)$$

où p est la pression et ρ la masse volumique. L'énergie potentielle massique se limite à celle de pesanteur d'expression gz . L'énergie cinétique massique est $v^2/2$. Finalement, on peut récrire le premier principe selon

$$\Delta\left(\frac{1}{2}v^2 + gz + \frac{p}{\rho}\right) = 0 \quad \text{et} \quad e_T = \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho gz + p = C^{\text{te}}$$

Ce terme e_T s'identifie à l'énergie totale volumique dont on vient de démontrer la constance le long d'une ligne de courant. Par conséquent,

$$H = \frac{e_T}{\rho g}$$

appelée hauteur manométrique, ou charge totale, est également une constante.

I.A.1.c Dans un fluide réel, la viscosité n'est pas nulle et joue un rôle non négligeable près des parois, où la vitesse du fluide est celle de la paroi.

C'est l'exemple d'une conduite cylindrique, dans laquelle le profil des vitesses est parabolique si on prend en compte la viscosité, alors qu'il est uniforme sinon. C'est justement ce profil parabolique que l'on retrouve dans les questions suivantes.

I.A.1.d Le seul mécanisme de dissipation de l'énergie présent entre deux points A et B est celui dû aux forces de viscosité et correspond à un travail massique supplémentaire à prendre en compte par rapport à la question I.A.1.b. Ce travail s'identifie à la circulation des forces de viscosité et le premier principe se réécrit

$$e_T(B) - e_T(A) = \int_A^B \vec{f}_{\text{visq}} \cdot \vec{d\ell}$$

Remarquons qu'ici les forces de viscosité sont opposées au déplacement, ainsi le produit scalaire est négatif et l'intégrale également : cela correspond bien à une perte d'énergie sur le chemin allant de A à B.

I.A.1.e D'après la question I.A.1.b, $H = e_T / \rho g$. En divisant la réponse à la question précédente par ρg , la perte de charge s'écrit

$$\begin{aligned} H(B) - H(A) &= \int_A^B \frac{\vec{f}_{\text{visq}} \cdot \vec{d\ell}}{\rho g} \\ &= \int_A^B \frac{\eta \Delta \vec{v} \cdot \vec{d\ell}}{\rho g} \\ H(B) - H(A) &= \frac{\eta}{\rho g} \int_A^B \vec{f}_{\text{visq}} \cdot \vec{d\ell} \end{aligned}$$

Comme la perte de charge ΔH est l'opposée de cette quantité,

$$\Delta H = -\frac{\eta}{\rho g} \int_A^B \vec{f}_{\text{visq}} \cdot \vec{d\ell}$$

En l'absence de viscosité, la perte de charge est bien nulle. De plus, le caractère positif de cette quantité justifie le nom de « perte » de charge : l'énergie totale ne peut que diminuer.

I.A.2.a Si v dépendait de x , la densité volumique de particules serait modifiée par accumulation ou désertion de matière dans certaines zones de l'espace. Cela entraînerait une variation de la masse volumique des particules de fluide lors de l'écoulement, ce qui est incompatible avec l'hypothèse d'incompressibilité.

I.A.2.b L'écoulement est unidimensionnel selon \vec{e}_x , par conséquent les lignes de courant sont des droites dans cette direction. Le long d'une telle ligne, entre deux points infiniment proches A et B écartés de dx , on a

$$H(B) - H(A) \simeq \frac{\partial H}{\partial x} dx$$

Grâce à la question I.A.1.e, on parvient à

$$\frac{\partial H}{\partial x} dx = -\frac{\eta}{\rho g} \int_A^B \Delta \vec{v} \cdot \vec{d\ell}$$

En appliquant les simplifications obtenues à la question I.A.2.a et en utilisant l'expression de $\Delta \vec{v}$ fournie, on obtient

$$\begin{aligned} -adx &= \frac{\partial H}{\partial x} dx \\ &= -\frac{\eta}{\rho g} \int_x^{x+dx} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v(r)}{\partial r} \right) \vec{e}_x \cdot \vec{d\ell} \\ &= -\frac{\eta}{\rho g} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v(r)}{\partial r} \right) \int_x^{x+dx} dx \\ -adx &= -\frac{\eta}{\rho g} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v(r)}{\partial r} \right) dx \end{aligned}$$

Centrale Physique et Chimie 2 PSI 2016 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Vincent Wieczny (ENS Lyon) ; il a été relu par Stéphane Ravier (Professeur en CPGE), Alexandre Herault (Professeur en CPGE) et Julien Dumont (Professeur en CPGE).

Ce sujet est composé de deux parties indépendantes et de longueurs sensiblement équivalentes.

- La première partie traite de deux des nombreuses applications d'un sel commun, le chlorure de sodium : l'obtention des cristaux salins par évaporation de l'eau de mer et l'électrolyse de la solution aqueuse de chlorure de sodium pour la production de dichlore et de dihydrogène. La première sous-partie fait appel à des connaissances de chimie en solution aqueuse de première année, mais certaines questions nécessitent une réflexion transversale ou des raisonnements exigeants. Au contraire, la seconde sous-partie repose davantage sur les compétences de seconde année que sont la thermodynamique chimique et l'électrochimie. Les questions sont plus classiques mais s'appuient les unes sur les autres. Il fallait donc progresser rapidement pour espérer répondre aux dernières questions.
- La seconde partie a pour thème la cuisson des œufs à l'aide d'un cuiseur à vapeur d'eau dont on se propose d'analyser quelques caractéristiques. Partant d'un constat apparemment contre-intuitif (la quantité d'eau nécessaire à la cuisson des œufs est d'autant plus faible que leur nombre est important), on modélise le processus de cuisson pour parvenir à une explication quantitative validée par des données expérimentales. S'il est essentiellement question de diffusion thermique, il est également nécessaire de conduire quelques raisonnements non élémentaires.

Ce sujet est fidèle à l'esprit du concours Centrale Supélec : si l'épreuve est relativement longue, elle reste suffisamment guidée pour permettre la progression des candidats. Chaque partie présente une part d'originalité et certaines questions demandent des prises d'initiative, aptitude essentielle pour tout ingénieur.

INDICATIONS

Partie I

- I.A.1.b Pour qu'il y ait évaporation, il est nécessaire qu'un équilibre entre l'eau liquide et la vapeur d'eau se forme. Quels peuvent être les effets du vent et du soleil sur cet équilibre ?
- I.A.3.a Dès l'apparition du premier cristal, l'équilibre de précipitation du chlorure de sodium est vérifié.
- I.A.3.b Si 80 % de la quantité de matière de chlorure de sodium est sous forme de sel, seule 20 % de la concentration initiale en chlorure de sodium est conservée en solution.
- I.A.3.c Quelle est la conséquence de la dissolution d'un sel chloré supplémentaire sur l'équilibre de dissolution du chlorure de sodium ?
- I.B.2 Décomposer l'équation de la réaction d'électrolyse en une combinaison linéaire d'équations de réaction dont les données thermodynamiques sont connues.
- I.B.5 Déterminer la charge électrique échangée Q_e puis l'énergie électrique utile associée $\mathcal{E}_{\text{utile}} = Q_e U$.
- I.B.6 Cette question appelle un raisonnement qualitatif en prenant appui sur l'expression de Nernst du potentiel d'électrode.
- I.B.7 Le domaine de stabilité du dichlore coïncide-t-il avec le domaine de stabilité des ions hydroxyde ?
- I.B.11 Quelle est la conséquence d'une importante et brutale élévation de température d'un gaz ?

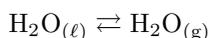
Partie II

- II.B.2.b Relier θ , temps caractéristique de diffusion, à une échelle caractéristique spatiale en analysant une équation de diffusion en ordre de grandeur.
- II.B.3.a Quel serait le sens physique de la solution $g(\tau)$ de l'équation différentielle en absence de signe négatif devant A^2 ?
- II.B.3.c Penser au théorème de superposition des solutions applicable aux équations différentielles linéaires.
- II.B.4.b Poser $A = \pi + \varepsilon$ où ε représente l'erreur commise et reporter dans l'équation.
- II.B.4.d Exploiter la limite usuelle $\sin x/x \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$.
- II.C.1.a et b Cuire un œuf revient à l'élever en température. Repérer dans l'énoncé les températures de cuisson extrêmes pour obtenir un œuf dur.
- II.C.2 Exploiter l'expression du premier principe appliqué à un système ouvert en régime permanent.
- II.C.3 Intégrer la relation précédente entre $t = 0$ et $t = \Delta t_2$.
- II.C.4 La surestimation de la puissance thermique minimale peut être due aux limites d'un modèle ou à des grandeurs peu fiables.
- II.C.5 Pour estimer le rayon des œufs, faire apparaître la dépendance en r_2 via l'expression de \mathcal{E}_d proposée à la question II.C.1.

I. LE CHLORURE DE SODIUM, UN SEL COURANT POUR DE NOMBREUSES APPLICATIONS

I.A.1.a La salinité de l'eau de mer correspond à la **masse totale de sels dissous par unité de volume d'eau de mer** : si le chlorure de sodium est de loin le soluté majoritaire, il n'est pas le seul à l'exemple du chlorure de magnésium, c'est pourquoi la salinité de l'eau de mer est supérieure à la concentration massique en chlorure de sodium.

I.A.1.b L'évaporation de l'eau correspond au changement d'état entre la phase liquide et la phase gazeuse, ce qui se résume par l'équilibre



Le déplacement de cet équilibre dans le sens direct est favorisé :

- par le **vent**, qui contribue à renouveler l'air humide à la surface de l'eau dû à l'évaporation par un air plus sec favorisant un déplacement de l'équilibre vers la vapeur d'eau ;
- par le **rayonnement solaire** car l'évaporation est un processus endothermique qui est favorisé par l'apport énergétique du rayonnement solaire.

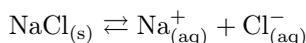
I.A.2 La concentration molaire moyenne c_{NaCl} en chlorure de sodium dans l'eau de mer se déduit de sa concentration massique moyenne $t_{\text{NaCl}} = 27,2 \text{ g} \cdot \text{L}^{-1}$.

$$c_{\text{NaCl}} = \frac{n_{\text{NaCl}}}{V} = \frac{m_{\text{NaCl}}/M_{\text{NaCl}}}{V} = \frac{t_{\text{NaCl}}}{M_{\text{NaCl}}} = 4,65 \cdot 10^{-1} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

I.A.3.a On pose c_{limite} la concentration limite en sel pour qu'il y ait précipitation. Par définition,

$$c_{\text{limite}} = \frac{n}{V_{\text{limite}}} = \frac{c_{\text{NaCl}} V_{\text{initial}}}{V_{\text{limite}}} \quad (\text{I.1})$$

où n désigne la quantité de matière de chlorure de sodium contenue dans un volume V_{initial} d'eau de mer et V_{limite} le volume de solution pour que le premier cristal apparaisse. Or, dès le début de la cristallisation, l'équilibre de précipitation est vérifié, soit



ce qui permet d'appliquer la condition d'équilibre de Guldberg et Waage :

$$K_s = [\text{Na}^+][\text{Cl}^-] = c_{\text{limite}}^2 \quad (\text{I.2})$$

car $[\text{Na}^+] = [\text{Cl}^-] = c_{\text{limite}}$ du fait de la stœchiométrie du sel $\text{NaCl}_{(\text{s})}$. En combinant (I.1) et (I.2), on en déduit le pourcentage de diminution volumique

$$\frac{V_{\text{initial}} - V_{\text{limite}}}{V_{\text{initial}}} = 1 - \frac{V_{\text{limite}}}{V_{\text{initial}}} = 1 - \frac{c_{\text{NaCl}}}{c_{\text{limite}}} = 1 - \frac{c_{\text{NaCl}}}{\sqrt{K_s}} = 92,3 \%$$

I.A.3.b Pour que 80 % de la quantité de matière de chlorure de sodium soit sous forme solide, sa concentration à l'état dissous vérifie nécessairement $c'_{\text{NaCl}} = 0,2 c_{\text{NaCl}}$. En raisonnant par analogie avec la question précédente,

$$\frac{V_{\text{initial}} - V'_{\text{limite}}}{V_{\text{initial}}} = 1 - \frac{c'_{\text{NaCl}}}{\sqrt{K_s}} = 98,5 \%$$

En n'évaporant qu'une partie de l'eau, on évite la précipitation d'autres sels, ce qui constitue une première étape de séparation.

I.A.3.c La présence d'autres sels chlorés dissous, tels que le chlorure de magnésium, réduit la solubilité du chlorure de sodium par rapport à la situation où il serait seul en solution : en effet, l'apport d'ions chlorure supplémentaires par la dissolution de chlorure de magnésium au sein d'une solution contenant déjà ces ions tend à vérifier plus rapidement, c'est-à-dire pour une diminution volumique moindre, la condition de précipitation de $\text{NaCl}_{(s)}$, ce qui se traduit par une diminution de solubilité du chlorure de sodium : on parle d'**effet d'ion commun**. De fait, les diminutions volumiques précédentes devraient être plus faibles.

On pose s la solubilité du chlorure de sodium seul en solution. D'après la loi de Guldberg et Waage,

$$s = \sqrt{K_s}$$

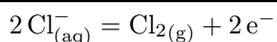
Supposons désormais que la dissolution du chlorure de magnésium apporte une contribution c à la concentration totale en ions chlorure. La condition d'équilibre s'écrit alors

$$K_s = s' \cdot (s' + c)$$

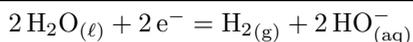
soit encore
$$s' = \frac{\sqrt{c^2 + 4K_s} - c}{2} < s$$

où s' désigne la solubilité du chlorure de sodium en présence de chlorure de magnésium, qui est plus faible qu'en l'absence d'autres sels chlorés.

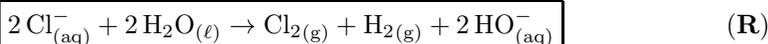
I.B.1 L'électrolyse d'une solution de chlorure de sodium se traduit par le dégagement de dichlore $\text{Cl}_{2(g)}$ à l'**anode** (oxydation de $\text{Cl}^-_{(aq)}$) selon la demi-équation



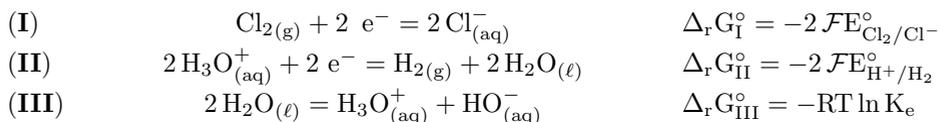
ainsi que le dégagement de dihydrogène $\text{H}_{2(g)}$ à la **cathode** (réduction de $\text{H}_2\text{O}_{(\ell)}$), en milieu neutre, selon la demi-équation



On en déduit le **bilan de l'électrolyse**.



I.B.2 Remarquons que l'équation de la réaction d'électrolyse (**R**) peut s'écrire à partir des trois équations suivantes :



En effet, on constate que **(R)** = **-(I)** + **(II)** + 2 **(III)** ce qui nous permet, en appliquant la loi de Hess, d'exprimer l'enthalpie libre standard de réaction de **(R)**, notée $\Delta_r G_R^\circ$:

$$\Delta_r G_R^\circ = -\Delta_r G_I^\circ + \Delta_r G_{II}^\circ + 2 \Delta_r G_{III}^\circ$$

Mines Physique 1 PSI 2016 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Vincent Freulon (Professeur en CPGE) ; il a été relu par Tom Morel (Professeur en CPGE) et Stéphane Ravier (Professeur en CPGE).

Ce sujet est composé de trois parties qui ont pour fil conducteur l'étude des oscillations du Millenium Bridge, à Londres. D'importantes oscillations avaient conduit à sa fermeture, quelques jours seulement après son inauguration !

- La première partie propose une modélisation simple du pont. Le système est décrit à l'aide d'un oscillateur masse-ressort faiblement amorti. On analyse la réponse de ce système à un échelon, puis à un forçage sinusoïdal qui décrit l'excitation périodique due au passage d'un piéton sur la passerelle. L'étude de la réponse fréquentielle fait ressortir une résonance à la fréquence typique de la marche des piétons. Un dispositif mécanique est alors ajouté pour supprimer le phénomène de résonance. Pour pouvoir conclure quant à l'utilité de cet ajout, on est conduit à analyser finement le contenu spectral de l'excitation du pont par les pas des piétons.
- C'est l'étude des ondes de compression longitudinales à travers la structure du pont qui débute la deuxième partie. S'ensuit l'établissement de l'équation d'onde pour la propagation d'ondes transversales le long d'une corde tendue.
- Dans la troisième partie, on modifie l'équation différentielle établie précédemment pour tenir compte de la rigidité interne de la structure. L'étude des modes propres d'oscillation de la passerelle est alors réalisée.

De difficulté modérée, cet énoncé aborde essentiellement les oscillateurs et les ondes mécaniques. Il est proche du cours et contient peu d'applications numériques. Quelques analyses de courbes nécessitent un peu d'entraînement ou de bon sens.

INDICATIONS

Partie I

- 1 Remarquer que $x = \ell = \text{OG}$. L'expression de \tilde{x} est obtenue en cherchant la position d'équilibre.
- 2 La prise en compte de l'effet du vent revient à changer α en $\alpha - \beta$.
- 3 On peut poser indifféremment $\underline{F}_1 = F_1$ ou $\underline{F}_1 = -F_1$.
- 4 Inutile de dériver $|\underline{H}|$ par rapport à Ω , il suffit de dériver $(1 - \Omega^2)^2 + 4\xi^2\Omega^2$.
- 5 Remarquer que pour $\xi^2 \ll 1$, $\omega_r \simeq \omega_0$. Utiliser les propriétés d'une résonance aiguë pour estimer graphiquement la valeur de ξ .
- 8 Le spectre d'un signal périodique possède une propriété particulière, que seul un des spectres proposés vérifie. Remarquer que les autres spectres violent le théorème de Shannon (ce qui entraîne l'apparition de pics fantômes).

Partie II

- 11 S'aider d'un schéma pour relier ΔL à $X(x + dx, t)$, $X(x, t)$, x et dx . Effectuer un développement limité à l'ordre 1 en dx . Noter ensuite que $L = dx$.
Invoquer le principe des actions réciproques pour montrer que la force exercée par la partie à gauche de la tranche est $-\vec{F}(x, t)$. Réaliser un développement limité à l'ordre 1 en dx .
- 12 Projeter l'équation vectorielle obtenue sur \widehat{u}_x .
- 13 Projeter l'équation vectorielle obtenue à la question 12 sur \widehat{u}_y . Effectuer un développement limité à l'ordre 1 en dx .

Partie III

- 15 Montrer que $g(t)$ est solution de l'équation $g''(t) - \kappa g(t) = 0$ où κ est une constante. Utiliser l'hypothèse des très petits déplacements (devant h ou b) pour déterminer le signe de κ et reconnaître une équation d'oscillateur harmonique.
- 16 L'équation différentielle vérifiée par f est homogène, linéaire, du quatrième ordre. Le cours de mathématiques indique que f est une combinaison linéaire de quatre fonctions indépendantes. Il suffit alors de montrer que les quatre fonctions apparaissant dans la combinaison linéaire proposée sont bien solutions de l'équation différentielle.
- 17 Commencer par déterminer les valeurs de A et C en utilisant les conditions en $x = 0$. Les conditions en $x = L$ permettent de trouver D, puis la condition de quantification.
- 18 Certains modes semblent présenter une dépendance à la coordonnée z qui n'est pas prise en compte dans le modèle. Les autres modes rappellent ceux de la corde de Melde.

LE MILLENIUM BRIDGE

I. OSCILLATEUR SIMPLE

1 Appliquons la loi de la quantité de mouvement au barycentre G, de masse m , dans le référentiel terrestre supposé galiléen :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = -\alpha \dot{x} \widehat{u}_x - mg \widehat{u}_x - k(\ell - \ell_0) \widehat{u}_x$$

D'après l'énoncé, $\ell = OG = x$. Projetons cette relation sur \widehat{u}_x :

$$m\ddot{x} = -\alpha\dot{x} - mg - k(x - \ell_0)$$

Divisons cette égalité par m et posons :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{et} \quad 2\xi\omega_0 = \frac{\alpha}{m}$$

Il vient
$$\ddot{x} + 2\xi\omega_0\dot{x} + \omega_0^2(x - \ell_0) + g = 0$$

Notons \tilde{x} la valeur de x à l'équilibre. Alors,

$$\omega_0^2(\tilde{x} - \ell_0) + g = 0$$

Il s'ensuit que

$$\tilde{x} = \ell_0 - \frac{g}{\omega_0^2}$$

Posons $x(t) = X(t) + \tilde{x}$, où $X(t)$ représente la position de G par rapport à sa position à l'équilibre. L'équation du mouvement devient :

$$\ddot{X} + 2\xi\omega_0\dot{X} + \omega_0^2\left(X + \ell_0 - \frac{g}{\omega_0^2} - \ell_0\right) + g = 0$$

Après simplification, il apparaît que

$$\ddot{X} + 2\xi\omega_0\dot{X} + \omega_0^2 X = 0 \quad \text{avec} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{et} \quad \xi = \frac{\alpha}{2\sqrt{mk}}$$

La constante ω_0 est la **pulsation propre**, c'est la pulsation naturelle de l'oscillateur en l'absence d'amortissement. Le coefficient ξ est le **facteur d'amortissement**, il croît proportionnellement avec le coefficient de frottement α .

2 Pour $\xi = 0$, l'équation du mouvement devient :

$$\ddot{X} + \omega_0^2 X = 0$$

Il s'agit de l'équation de l'**oscillateur harmonique** de pulsation ω_0 . La solution $X(t)$ est de la forme :

$$X(t) = A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t$$

Avec les conditions initiales imposées, on obtient que :

$$A = X(0) = X_0 \quad \text{et} \quad B\omega_0 = \dot{X}(0) = V_0$$

Par conséquent,

$$X(t) = X_0 \cos \omega_0 t + \frac{V_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t \quad (\text{pour } \xi = 0)$$

Pour $0 < \xi < 1$, en cherchant des solutions sous forme $X(t) = A e^{pt}$, on aboutit à l'équation caractéristique :

$$p^2 + 2\xi\omega_0 p + \omega_0^2 = 0$$

dont le discriminant est $\Delta = 4\omega_0^2(\xi^2 - 1) < 0$

Il s'ensuit que $p = -\xi\omega_0 \pm i\omega_0\sqrt{1 - \xi^2}$

Ainsi, $X(t)$ est de la forme :

$$X(t) = (A \cos \omega_a t + B \sin \omega_a t) e^{-\xi\omega_0 t} \quad \text{avec} \quad \omega_a = \omega_0 \sqrt{1 - \xi^2}$$

Cette fois, les conditions initiales se traduisent par

$$A = X(0) = X_0 \quad \text{et} \quad -A \xi\omega_0 + B \omega_a = \dot{X}(0) = V_0$$

si bien que

$$X(t) = \left(X_0 \cos \omega_a t + \frac{1}{\omega_a} [V_0 + \xi\omega_0 X_0] \sin \omega_a t \right) e^{-\xi\omega_0 t} \quad \text{avec} \quad \omega_a = \omega_0 \sqrt{1 - \xi^2}$$

On observe des **pseudo-oscillations**.

Enfin, l'ajout d'une force due au vent revient à changer α en $\alpha - \beta$, c'est-à-dire à redéfinir le facteur d'amortissement ξ et à l'écrire :

$$\xi = \frac{\alpha - \beta}{2m\omega_0}$$

Si $\beta > \alpha$, $\xi < 0$ et l'oscillateur devient instable. **Sous l'effet du vent, l'oscillateur peut se mettre à osciller spontanément.**

3 La nouvelle équation du mouvement est

$$\ddot{x} + 2\xi\omega_0 \dot{x} + \omega_0^2(x - \ell_0) + mg = -F_0 - F_1 \cos \omega t$$

Divisons par m et introduisons X , comme à la question 1,

$$\ddot{X} + 2\xi\omega_0 \dot{X} + \omega_0^2 X = -\frac{F_0}{m} - \frac{F_1}{m} \cos \omega t$$

Comme $X = Y - F_0/(m\omega_0^2)$, il vient :

$$\ddot{Y} + 2\xi\omega_0 \dot{Y} + \omega_0^2 Y = -\frac{F_1}{m} \cos \omega t$$

En régime sinusoïdal forcé (en posant $\underline{F}_1 = -F_1$), on a :

$$\underline{Y}(-\omega^2 + 2i\xi\omega_0\omega + \omega_0^2) = \frac{\underline{F}_1}{m}$$

Par conséquent,

$$\frac{\underline{Y}}{\underline{F}_1} = \frac{1}{-\omega^2 + 2i\xi\omega_0\omega + \omega_0^2}$$

donc

$$\underline{H} = \frac{1/\omega_0^2}{1 - \Omega^2 + 2i\xi\Omega}$$

On aurait aussi pu poser $\underline{F}_1 = F_1$. Dans ce cas,

$$\underline{H} = -\frac{1/\omega_0^2}{1 - \Omega^2 + 2i\xi\Omega}$$

Mines Physique 2 PSI 2016 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Guillaume Maimbourg (Agrégé de physique) ; il a été relu par Cyril Jean (ENS Ulm) et Tom Morel (Professeur en CPGE).

Ce sujet présente différentes méthodes de mesure d'un champ magnétique statique. Il comporte quatre parties totalement indépendantes.

- La première partie, facile et bien guidée, propose l'étude de la balance de Cotton, dispositif de mesure du champ magnétique par évaluation de la force exercée sur un fil traversé par un courant. Une bonne maîtrise de la mécanique des solides et en particulier du théorème du moment cinétique est requise. Cette partie permettait également de tester la capacité des candidats à utiliser la force de Laplace.
- La deuxième partie, la plus difficile, étudie une boussole. Elle est divisée en deux sous-parties. La première, calculatoire, s'intéresse au comportement d'une boussole, modélisée par un moment magnétique permanent, placée au centre de bobines de Helmholtz. La seconde cherche la direction et l'intensité du champ magnétique terrestre local à Paris. La difficulté réside principalement dans une bonne compréhension de l'énoncé afin d'effectuer un schéma clair de la situation. Ensuite, la résolution est directe.
- La troisième partie, la plus longue, étudie dans un premier temps l'effet Hall et son intérêt dans la mesure d'un champ magnétique. Ensuite, l'intégration électronique du capteur est étudiée. Certaines questions sont délicates et il faut bien maîtriser les chapitres portant sur les amplificateurs linéaires intégrés.
- La dernière partie propose enfin l'étude de l'effet magnétorésistif et de son application à la mesure d'un champ magnétique. Un cylindre creux est traversé par un courant de sa face interne vers sa face externe, tandis qu'un champ magnétique est appliqué dans l'axe du cylindre. On montre que la résistance du matériau est modifiée par le champ magnétique.

L'énoncé est long et parfois difficile. Cependant, l'indépendance totale entre les parties offrait aux candidats de nombreux points d'entrée dans le sujet. Il permet par ailleurs d'aborder de nombreux aspects du cours de physique tels que l'électromagnétisme, la mécanique et l'électronique.

INDICATIONS**Partie I**

- 1 Montrer que G est situé à la verticale de O.
- 3 Se placer sur une section élémentaire du segment $[A_3A_4]$ pour calculer la force de Laplace locale puis intégrer sur tout ce segment.

Partie II

- 5 Une position d'équilibre stable correspond à un minimum d'énergie potentielle. Par ailleurs, l'énergie potentielle associée à cette interaction magnétique s'écrit

$$E_p = -\overrightarrow{\mathcal{M}}_m \cdot \overrightarrow{B}$$

- 6 Utiliser la formule du champ magnétique à l'intérieur d'un solénoïde infini.
- 9 L'équateur est défini comme l'intersection de la surface de la Terre avec le plan perpendiculaire à son axe de rotation. Il n'est donc pas orthogonal au moment magnétique terrestre.

Partie III

- 17 La résistance d'entrée est par définition le rapport entre la tension et le courant à l'entrée du composant.
- 19 Montrer qu'un suiveur est le montage le plus simple pour résoudre le problème introduit par la question 17.
- 20 L'amplificateur différentiel doit être précédé par deux montages suiveurs afin que sa résistance d'entrée soit infinie.
- 21 Utiliser les invariances et symétries du problème afin de simplifier l'expression de \overrightarrow{B}_0 . Appliquer ensuite l'équation de Maxwell-Ampère afin de déterminer l'expression de \overrightarrow{B}_0 en fonction de \overrightarrow{j} .

Partie IV

- 23 Montrer que le problème est invariant par rotation et translation selon l'axe de révolution du cylindre.
- 25 La résistance de la couronne cylindrique est définie comme le rapport entre la différence de potentiel $V_2 - V_1$ et l'intensité I traversant le conducteur.

MESURES DE CHAMPS MAGNÉTIQUES

I. LA BALANCE DE COTTON

1 Notons (S) la partie mobile de la balance. À vide, deux forces s'appliquent sur le système (S) :

- l'action de contact de l'axe sur (S) modélisée par une liaison pivot parfait (car sans frottement) ;
- le poids \vec{P} qui s'applique en G .

Appliquons le théorème du moment cinétique sur (S) au point O . Le système est à l'équilibre, ce qui implique que la somme des moments des forces s'annule. Par ailleurs, la liaison pivot étant parfaite, son moment associé est nul en O . Si bien que le moment du poids doit être nul également.

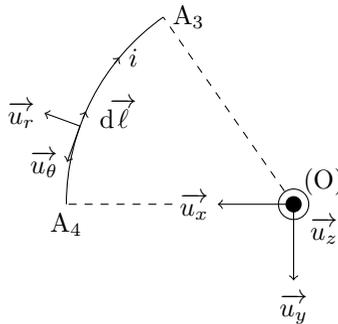
$$\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{P}) = \vec{OG} \wedge \vec{P} = 0$$

Par conséquent,

G est situé sur la verticale passant par O .

La situation proposée par l'énoncé ne permet pas de démontrer que le barycentre G est situé exactement en O . En effet l'équilibre est réalisé (absence de moment mécanique en O du au poids de l'objet) à la condition que le vecteur \vec{OG} soit colinéaire au poids. Il est même d'usage afin d'assurer la stabilité de l'équilibre que le barycentre des masses soit situé en dessous de l'axe. Cette considération n'est pas importante pour la suite du sujet, puisque la balance est toujours considérée à l'équilibre. Par conséquent, le moment du poids des parties mobiles n'intervient pas dans les calculs suivants.

2 Introduisons le repère polaire $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$ et le point $M(r, \theta, z)$ situé sur les parties en arc de cercle.



Évaluons alors la force de Laplace élémentaire $d\vec{F}_L$ sur une section $d\vec{\ell}$ de l'arc de cercle $[A_4A_5]$ de rayon $r = d_1 - l/2$, orienté dans le sens du courant d'intensité i :

$$d\vec{\ell} = -r d\theta \vec{u}_\theta \quad \text{soit} \quad d\vec{F}_L = i d\vec{\ell} \wedge \vec{B} = -iB r d\theta \vec{u}_r$$

Calculons alors le moment associé au point O .

$$\vec{\mathcal{M}}_O(d\vec{F}_L) = r\vec{u}_r \wedge (-iB r d\theta \vec{u}_r) = \vec{0}$$

Une démonstration équivalente permet de montrer que ce moment est également nul sur l'arc de cercle $[A_2A_3]$.

Le moment des forces de Laplace sur les parties en arc de cercle est nul.

3 Notons N un point situé sur le segment $[A_3A_4]$ et $d\vec{\ell} = -dr\vec{u}_r$ un élément de longueur infinitésimale centré sur N et orienté dans le sens du courant d'intensité i . La force de Laplace élémentaire sur cette section s'écrit

$$d\vec{F}_L = i d\vec{\ell} \wedge \vec{B} = iB dr \vec{u}_\theta$$

Le moment élémentaire associé vaut

$$\vec{\mathcal{M}}_O(d\vec{F}_L) = r\vec{u}_r \wedge (iB dr \vec{u}_\theta) = iB r dr \vec{u}_z$$

Intégrons ces moments élémentaires sur le segment $[A_3A_4]$ pour obtenir la résultante

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}_L) &= iB \int_{d_1-\ell/2}^{d_1+\ell/2} r dr \vec{u}_z \\ &= iB \left(\frac{(d_1 + \ell/2)^2}{2} - \frac{(d_1 - \ell/2)^2}{2} \right) \vec{u}_z \end{aligned}$$

$$\boxed{\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}_L) = iB d_1 \ell \vec{u}_z}$$

Pour conserver l'équilibre mécanique des parties mobiles, ce moment doit être compensé par celui associé à la force \vec{P}_{aj} , créée par les masses ajoutées en D . Lorsque la balance est à l'équilibre, $\vec{OD} = -d_2\vec{u}_x$. Le moment du poids s'écrit donc

$$\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{P}_{aj}) = \vec{OD} \wedge (mg \vec{u}_y) = -d_2 mg \vec{u}_z$$

L'équilibre est maintenu à la condition

$$\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}_L) + \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{P}_{aj}) = \vec{0}$$

D'où

$$\boxed{B = \frac{d_2 mg}{i d_1 \ell}}$$

4 Évaluons le champ magnétique δB associé une variation de masse $\delta_m = 0,05$ g. Cette valeur correspond à la plus petite valeur du champ magnétique mesurable.

$$\boxed{\delta B = \frac{d_2 \delta_m g}{i d_1 \ell} = 1 \text{ mT}}$$

Comparons cette valeur à quelques valeurs typiques de champs magnétiques. Le champ terrestre vaut environ $50 \mu\text{T}$, le champ induit par un aimant est de l'ordre de 100 mT et le champ associé à une bobine peut aller de 1 T (bobine classique disponible en salle de travaux pratiques) à plus de 10 T (bobine supraconductrice utilisée par exemple pour générer le champ magnétique nécessaire à un appareil d'imagerie par résonance magnétique). Par conséquent, **cette balance est utilisable pour la mesure de champ magnétique supérieur à 1 mT . Il est en revanche impossible de mesurer ainsi le champ magnétique terrestre.**

Mines Chimie PSI 2016 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Alexandre Herault (Professeur en CPGE) ; il a été relu par Vincent Wieczny (ENS Lyon) et Stéphane Ravier (Professeur en CPGE).

Habituellement dédié à l'étude d'un élément chimique, le sujet de chimie du concours Mines-Ponts en filière PSI a cette année pour thème le béton. Les domaines abordés sont cependant classiques et sans surprise pour cette épreuve très courte. L'étude est divisée en quatre parties de longueurs et de difficultés variables.

- La première partie concerne la réaction à l'origine du durcissement du ciment, principal constituant du béton, en présence d'eau. On s'intéresse au bilan d'avancement de la réaction, puis on détermine son enthalpie standard de réaction à l'aide d'une étude calorimétrique.
- La deuxième partie s'articule autour de la basicité du béton, plus particulièrement de la solution interstitielle qui se trouve dans ses pores. La courbe d'un dosage conductimétrique est fournie et doit être analysée de façon à déterminer la concentration et le pH de cette solution.
- La troisième partie, qui est la plus longue, s'intéresse à la carbonatation du béton par le dioxyde de carbone atmosphérique. Ce phénomène est à l'origine d'une fragilisation du béton. Les questions sont variées mais restent classiques sur des thèmes comme le remplissage électronique, la thermodynamique chimique et la cristallographie.
- La dernière partie étudie la corrosion du béton armé à travers le diagramme potentiel-pH du fer et les courbes courant-potentiel. Diagramme et courbes sont fournis et il convient de les interpréter et de les utiliser pour déterminer les réactions chimiques et électrochimiques impliquées, ainsi que des caractéristiques électriques comme le potentiel et le courant de corrosion.

S'il est classique d'observer une progression de la difficulté en cours d'épreuve dans ce concours, ce n'est pas vraiment le cas ici, avec notamment des questions calculatoires dès le début. Dans cette épreuve de type sprint, il ne faut pas hésiter à traiter en premier les questions ne nécessitant pas de calculs afin d'avancer le plus rapidement possible. Rappelons enfin que les thèmes abordés et les questions posées dans cette épreuve sont récurrents d'une année sur l'autre, ce qui rend la préparation aisée pour qui travaille un minimum la chimie en cours d'année.

INDICATIONS

- 1 L'énoncé ne donne pas les masses molaires de O et H: $\mathcal{M}_O = 16 \text{ g.mol}^{-1}$ et $\mathcal{M}_H = 1 \text{ g.mol}^{-1}$.
- 2 Décomposer la transformation en deux: d'abord la réaction à T et P constantes, puis la variation de température.
- 5 Ne pas oublier les ions chlorure de l'acide chlorhydrique.
- 6 Le pH est décroissant car on ajoute de l'acide. La solution à l'équivalence est neutre.
- 7 De quel élément la structure de Ca^{2+} est-elle isoélectronique?
- 9 Écrire l'équation de réaction de la carbonatation du béton, puis exprimer sa constante d'équilibre à l'aide des produits de solubilité.
- 10 Calculer l'enthalpie standard de réaction de la solubilisation, puis utiliser la loi de Van't Hoff. Aucune hypothèse n'est en fait nécessaire.
- 13 Le volume formulaire est le volume d'une seule entité. L'exprimer à l'aide du volume molaire.
- 14 La perspective du dessin est trompeuse: la maille est un prisme à base losange dont seuls les sommets sont occupés.
- 17 L'oxydation du fer par l'eau en milieu basique aboutit au domaine C.
- 18 Une couche protectrice peut se former en surface.
- 19 Le potentiel de corrosion correspond au point de fonctionnement pour lequel les intensités anodique et cathodique sont égales en valeur absolue.
- 20 Les points donnés dans l'énoncé forment deux droites sécantes.
- 21 Exprimer la quantité de matière de fer dans un volume Se , puis relier l'intensité à la dérivé de cette quantité par rapport au temps.

LE BÉTON

1] Commençons par calculer les quantités de matière des réactifs en utilisant les masses molaires, non données dans l'énoncé, de l'oxygène ($\mathcal{M}_O = 16 \text{ g}\cdot\text{mol}^{-1}$) et de l'hydrogène ($\mathcal{M}_H = 1 \text{ g}\cdot\text{mol}^{-1}$):

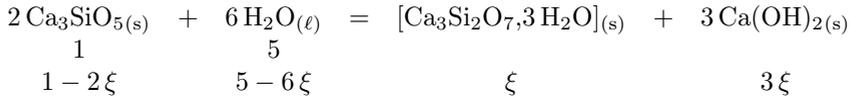
$$n_1(\text{Ca}_3\text{SiO}_5) = \frac{m_1}{\mathcal{M}_1} = \frac{228}{3 \times 40 + 28 + 5 \times 16} = 1 \text{ mol}$$

et

$$n_2(\text{H}_2\text{O}) = \frac{m_2}{\mathcal{M}_2} = \frac{90}{18} = 5 \text{ mol}$$

Si la masse molaire de l'hydrogène n'est généralement pas un souci, celle de l'oxygène est souvent mal connue. Il peut être utile de se rappeler que pour les éléments légers (sauf H), la masse molaire est le double du numéro atomique qui, lui, est bien donné dans l'énoncé.

Il y a 5 fois plus d'eau que de ciment, pour une stœchiométrie 3:1 donc **le ciment est le réactif limitant**. Le bilan d'avancement en moles est le suivant :



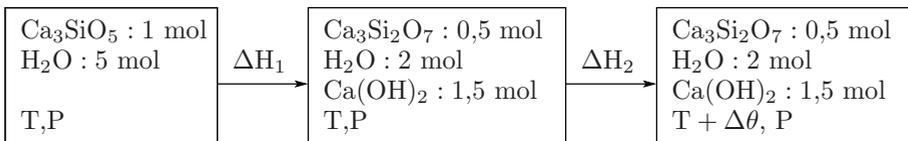
En supposant la réaction totale, c'est le ciment qui disparaît en premier, pour un avancement final $\xi_{\max} = 0,5 \text{ mol}$. Les quantités de matière finales sont alors

$n_f(\text{Ca}_3\text{SiO}_5) = 0 \text{ mol}$	$n_f(\text{Ca}_3\text{Si}_2\text{O}_7, 3 \text{H}_2\text{O}) = 0,5 \text{ mol}$
$n_f(\text{H}_2\text{O}) = 2 \text{ mol}$	$n_f(\text{Ca}(\text{OH})_2) = 1,5 \text{ mol}$

2] L'évolution se faisant à pression constante, la variation d'enthalpie (ΔH) du système, constitué du calorimètre et de son contenu, est égale au transfert thermique (Q) reçu du milieu extérieur. Par ailleurs, la transformation est supposée adiabatique ($Q = 0$), ce qui donne une évolution isenthalpique :

$$\Delta H = Q = 0$$

L'enthalpie étant une fonction d'état, sa variation ne dépend pas du chemin suivi par la transformation. On choisit de décomposer en deux évolutions simples : la réaction chimique à température et pression constantes, puis la variation de température du système final.



Il vient ainsi $\Delta H = \Delta H_1 + \Delta H_2 = 0$

Les variations d'enthalpie s'écrivent

$$\Delta H_1 = \int_0^{\xi_{\max}} \Delta_r H^\circ d\xi = \xi_{\max} \Delta_r H^\circ$$

et

$$\Delta H_2 = \int_T^{T+\Delta\theta} C_{p,\text{tot}} dT = \Delta\theta \cdot (\sum n_i C_{p,i})$$

Numériquement,

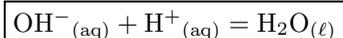
$$\Delta H_1 = 0,5 \times \Delta_r H^\circ \quad \text{et} \quad \Delta H_2 = 15 \times (0,5 \times 340 + 1,5 \times 80 + 2 \times 75) = 6\,600 \text{ J}$$

soit

$$\boxed{\Delta_r H^\circ = -13,2 \text{ kJ}\cdot\text{mol}^{-1}}$$

Il est utile de vérifier que l'on trouve bien un résultat négatif car la réaction est exothermique (la température a augmenté).

3 La réaction de titrage est



dont la constante d'équilibre est reliée au produit ionique de l'eau :

$$\boxed{K^\circ = \frac{1}{K_e} = 10^{14}}$$

La réaction est quantitative ($K^\circ \gg 1$), ce qui est indispensable pour une réaction de dosage.

4 Le volume équivalent lu pour ce dosage est $V_e = 1,0 \text{ mL}$. D'après la réaction de titrage, la relation à l'équivalence s'écrit, en notant c_0 la concentration initiale en ions hydroxyde OH^- ,

$$c_0 V_0 = c V_e$$

d'où
$$c_0 = c \frac{V_e}{V_0} = 5 \cdot 10^{-3} \text{ mol}\cdot\text{L}^{-1} = [\text{OH}^-]$$

Ainsi,
$$\text{pOH} = -\log[\text{OH}^-] = 3 - \log 5 = 3 - \frac{\ln 5}{\ln 10}$$

Numériquement,
$$\text{pOH} = 3 - \frac{1,6}{2,3} \approx 2,3$$

donc

$$\boxed{\text{pH} = 14 - \text{pOH} = 11,7}$$

Compte tenu des indications de l'énoncé, il est également possible de considérer que la solution recueillie en surface du béton est une solution saturée d'hydroxyde de calcium. On peut alors calculer le pH à l'équilibre de la saturation.



En notant s la solubilité, il vient, à l'équilibre

$$K_s = s \cdot (2s)^2 = 4s^3 = 5 \cdot 10^6$$

soit
$$s \approx 10^{-2} \text{ mol}\cdot\text{L}^{-1}$$

d'où
$$[\text{OH}^-] \approx 2 \cdot 10^{-2} \text{ mol}\cdot\text{L}^{-1}$$

Ainsi,
$$\text{pOH} = 2 - \log 2 \approx 1,7$$

Finalement,
$$\text{pH} \approx 12,3$$