Annales des Concours

PC
Mathématiques · Informatique
2025

Sous la coordination de

William Aufort
professeur en CPGE
ancien élève de l'École Normale Supérieure (de Lyon)

Benjamin Monmege
enseignant-chercheur à l'université
ancien élève de l'École Normale Supérieure (Paris-Saclay)

Vincent Puyhaubert
professeur en CPGE
ancien élève de l'École Normale Supérieure (Paris-Saclay)

Par

Virgile Andreani
ENS Ulm

Guillaume Clerc
ENS de Lyon

Denis Conduché
professeur en CPGE

Julie Gauthier
professeur agrégé

William Gregory
étudiant en Master

Sarah Houdaigoui
ENS Ulm

Angèle Niclas
enseignant-chercheur à l'université

Cyril Ravat
professeur en CPGE

Guillaume Soenen
ENS de Lyon

Youssef Yjjou
ENS de Lyon

Sommaire

Mines-Ponts

Polytechnique-ENS

Formulaires

SESSION 2025 **PC8M**

e3a POLYTECH

ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE PC

MATHÉMATIQUES

Durée : 4 heures

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

RAPPEL DES CONSIGNES

- *Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, bleu clair ou turquoise, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.*
- *Ne pas utiliser de correcteur.*
- *Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.*

Les calculatrices sont interdites.

Le sujet est composé de quatre exercices indépendants.

e3a Mathématiques PC 2025 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par William Gregory (étudiant en Master) ; il a été relu par Céline Chevalier (enseignant-chercheur à l'université) et Vincent Puyhaubert (professeur en CPGE).

Ce sujet est composé de quatre exercices indépendants. Ils font appel aux connaissances en analyse, algèbre linéaire et probabilités.

- L'exercice 1 aborde le calcul différentiel. On s'intéresse aux extrema globaux dans un domaine fermé d'une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. Cet exercice est assez court et plutôt guidé.
- L'exercice 2 propose la résolution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients non constants. On montre d'abord que l'équation admet des solutions développables en série entière sur $\mathbb{R}$, avant d'étudier une équation auxiliaire que l'on résout explicitement. On peut alors déterminer une expression d'une unique solution vérifiant une certaine condition. Cet exercice est calculatoire.
- L'exercice 3 porte sur l'algèbre linéaire. On montre qu'une matrice M_r, combinaison linéaire de la matrice identité et de la matrice dont tous les coefficients sont égaux à 1, est diagonalisable. On étudie ensuite une forme bilinéaire définie à l'aide de M_r.
- L'exercice 4 s'intéresse aux variables aléatoires X telles que $\mathrm{X}+1$ suit une loi géométrique. En se donnant deux telles variables aléatoires, on étudie la loi de la somme, de la différence et du minimum. On s'intéresse enfin à l'indépendance de la différence et du minimum. Cet exercice commence par deux questions de cours.

Ce sujet a le mérite de balayer plusieurs thématiques classiques du programme. Il aborde aussi un chapitre qui l'est moins, celui des fonctions de deux variables. L'exercice 1 peut être traité rapidement et sans difficulté. L'exercice 2 est un peu plus difficile et calculatoire. Les exercices 3 et 4 sont de bons sujets de révision pour l'algèbre linéaire et les variables aléatoires. Ils permettent de s'entraîner sur plusieurs méthodes importantes, avec de nombreuses questions plutôt accessibles et quelques-unes plus sophistiquées.

SESSION 2025 **PC1M**

ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE PC

MATHÉMATIQUES

Durée : 4 heures

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

RAPPEL DES CONSIGNES

- *Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, bleu clair ou turquoise, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.*
- *Ne pas utiliser de correcteur.*
- *Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.*

Les calculatrices sont interdites.

Le sujet est composé de trois exercices indépendants.

CCINP Maths PC 2025 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Guillaume Soenen (ENS de Lyon) ; il a été relu par Théotime Moutte (ENS de Lyon) et Gilbert Monna (professeur honoraire en CPGE).

Ce sujet est composé de trois exercices indépendants qui abordent les principaux thèmes mathématiques au programme : algèbre, analyse et probabilités.

- L'exercice 1 propose d'étudier l'endomorphisme φ_{A} défini sur l'ensemble des matrices et qui correspond à la multiplication à gauche par une matrice A préalablement fixée. Il est séparé en trois parties. La première présente les propriétés de base de l'endomorphisme. Elle est accessible dès la sup. La deuxième étudie un exemple concret en dimension 2. Elle permet ainsi de mieux appréhender l'endomorphisme avant la dernière partie, qui se place dans le cas général et vise à étudier le lien entre la diagonalisabilité de la matrice A et celle de l'endomorphisme φ_{A}. Cette dernière partie est plus difficile et nécessite une bonne connaissance des différentes caractérisations de la diagonalisabilité.
- L'exercice 2 s'intéresse aux polynômes de Hermite, qui sont une suite de polynômes définie par récurrence. En réalité, la première partie de cet exercice ne parle absolument pas de ces polynômes mais sert plutôt de préliminaire pour la suite. Il y est question de produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$ et de calcul de l'intégrale de Gauss via une méthode de calcul d'intégrales à paramètres. La deuxième partie étudie les propriétés des polynômes de Hermite et leurs liens avec le produit scalaire défini précédemment ainsi qu'avec la fonction $x \longmapsto e^{-x^2}$. Enfin, la dernière partie cherche à établir des relations entre les polynômes de Hermite et des quantités analytiques. Elle comporte des séries entières et une interversion série-intégrale.
- Le dernier exercice, consacré aux probabilités, étudie une expérience de tirages successifs de boules dans une urne. Il fait appel aux propriétés vérifiées par les probabilités et aux probabilités conditionnelles mais il ne fait pas apparaître de variable aléatoire. La deuxième partie de l'exercice comporte également quelques questions basiques sur les séries.

Le sujet utilise les trois grands champs mathématiques au programme de PC : algèbre (diagonalisabilité, produit scalaire), analyse (intégrales à paramètres, séries entières) et probabilités. Chaque exercice fait appel à des notions de deuxième année. Comme ils sont indépendants, il est possible de s'entraîner sur ces exercices au fur et à mesure de l'année et des chapitres vus en cours. Les deux premiers exercices font apparaître des questions plus difficiles à la fin.

SESSION 2025 **PC5IN**

CONCOURS COMMUN INP

ÉPREUVE MUTUALISÉE AVEC E3A-POLYTECH

ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE PC

INFORMATIQUE

Durée : 3 heures

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

RAPPEL DES CONSIGNES

- *Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, bleu clair ou turquoise, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.*
- *Ne pas utiliser de correcteur.*
- *Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.*

Les calculatrices sont interdites.

Le sujet est composé de trois parties.

L'épreuve est à traiter en langage **Python** sauf pour les bases de données.
Les différents algorithmes doivent être rendus dans leur forme définitive sur le **Document Réponse** dans l'espace réservé à cet effet en respectant les éléments de syntaxe du langage (les brouillons ne sont pas acceptés).
La réponse ne doit pas se limiter à la rédaction de l'algorithme sans explication, les programmes doivent être expliqués et commentés de manière raisonnable.

Énoncé et Annexe : 16 pages
Document Réponse (DR) : 11 pages

Seul le Document Réponse (DR) doit être rendu dans son intégralité (le QR Code doit être collé sur la première page du DR.

CCINP Informatique PC 2025 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Virgile Andreani (ENS Ulm) ; il a été relu par Cyril Ravat (professeur en CPGE) et Benjamin Monmege (enseignant-chercheur à l'université).

Ce sujet a pour thème la randonnée. On utilise une base de données de chemins, on analyse des traces GPS, puis on passe à la conception de randonnées de plusieurs journées à partir d'un graphe de chemins. De larges aspects du programme sont mobilisés : bases de données, analyse de données numériques et algorithmes de graphes, en particulier celui de Dijkstra dont on voit une version améliorée. Les questions de programmation ne consistent quasiment qu'à compléter des fonctions à trous et sont abordables. Ce sont plutôt les démonstrations et l'exécution de code sur papier qui demandent une très bonne compréhension des algorithmes impliqués.

- La partie I est consacrée à des questions de SQL, dont certaines sont mal posées voire piégeuses : pour plusieurs d'entre elles, la solution vraisemblablement attendue ne répondait pas totalement à la question.
- La partie II ne pose pas de difficulté particulière, elle teste la maîtrise de la programmation en Python et des structures de données du langage.
- La partie III est consacrée aux graphes et en particulier à l'algorithme de Dijkstra. Elle en propose une variante bidirectionnelle qui permet d'économiser la visite de certains sommets dans certains cas, et dont il s'agit finalement de prouver la correction partielle.

Ce sujet varié est intéressant pour réviser les chapitres utilisés. Comme les années précédentes, les réponses se font exclusivement sur un document réponse unique, ce qui peut perturber : la place disponible pour chaque explication et chaque code est fortement contrainte, et toute erreur conduisant à une réécriture massive devient une catastrophe. Nous vous conseillons donc de vous entraîner au cours de l'année à rendre des copies propres et sans ratures.

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

Mathématiques 1

PC

4 heures Calculatrice autorisée

2025

Un principe d'incertitude matriciel

Notations

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel. On note Id l'application identité de E. Un nombre complexe λ est valeur propre d'un endomorphisme ϕ de E si $\operatorname{Ker}(\phi - \lambda \mathrm{Id}) \neq \{0\}$. On note $\mathrm{VP}(\phi)$ l'ensemble des valeurs propres de ϕ. Pour tout $\lambda \in \mathrm{VP}(\phi)$, $\operatorname{Ker}(\phi - \lambda \mathrm{Id})$ est un sous-espace vectoriel de E, que l'on note $E_\lambda(\phi)$.

Si $x = (x_1, x_2, \dots, x_N)$ est un élément de $\mathbb{R}^N$, on note $\|x\|$ sa norme euclidienne canonique : $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^N x_i^2}$.

On note $\mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées de taille N à coefficients réels.
On note I_N la matrice identité de $\mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ et, si $(\alpha_1, \dots, \alpha_N) \in \mathbb{R}^N$, on note $\operatorname{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_N)$ la matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont $\alpha_1, \dots, \alpha_N$.

L'ensemble des valeurs propres d'un élément A de $\mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ est noté $\operatorname{Sp}(A)$.
On note $\mathcal{S}_N(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques réelles de taille N. On note $\mathcal{S}_N^+(\mathbb{R})$ (resp. $\mathcal{S}_N^{++}(\mathbb{R})$) l'ensemble des matrices symétriques réelles positives (resp. définies positives) de taille N.

Partie A – Autour du principe d'incertitude d'Heisenberg

Dans cette partie, E désigne le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{C})$ des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ indéfiniment dérivables.

I – Valeurs propres de l'opérateur dérivée seconde

Q1. Pour tout $f \in E$, on pose $\ell(f) = -f''$. Montrer que l'on définit ainsi un endomorphisme ℓ de E.

Q2. Montrer que $\mathbb{R}_+ \subset \mathrm{VP}(\ell)$. Pour tout réel $\lambda \in \mathbb{R}_+$, déterminer une base de $E_\lambda(\ell)$.

II – Cas des fonctions gaussiennes

Pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$, on définit $G_a : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{C} \\ t & \longmapsto \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}at^2} \end{cases}$ (gaussienne de paramètre a). On admet la convergence et la valeur de l'intégrale suivante :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} G_a(t)\mathrm{d}t = \sqrt{\frac{2\pi}{a}}.$$

On fixe un réel a strictement positif.

Q3. Montrer pour tout réel ξ la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} G_a(t)\mathrm{e}^{-i\xi t}\mathrm{d}t$.

On notera dans la suite $\widehat{G_a} : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{C} \\ \xi & \longmapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} G_a(t)\mathrm{e}^{-i\xi t}\mathrm{d}t \end{cases}$

Q4. Démontrer que l'application $\widehat{G_a}$ est de classe $\mathcal{C}^1$.

Q5. Démontrer que $\widehat{G_a}$ est solution sur $\mathbb{R}$ d'une équation différentielle du premier ordre que l'on explicitera.
En déduire que $\widehat{G_a} = \sqrt{\dfrac{2\pi}{a}}\, G_{1/a}$.

Centrale Maths 1 PC 2025 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Denis Conduché (professeur en CPGE) ; il a été relu par Loïc Jean (ENS Lyon) et Vincent Puyhaubert (professeur en CPGE).

Le sujet porte sur un principe d'incertitude matriciel. En physique, le principe d'incertitude d'Heisenberg affirme que le produit de l'incertitude sur la position et de l'incertitude sur la vitesse est minoré par une constante. Il se traduit mathématiquement, pour un signal représenté par une fonction, à l'aide de la transformée de Fourier et de l'écart-type.

Le but du sujet est d'établir un résultat analogue pour les signaux discrets, représentés par des vecteurs de $\mathbb{R}^{\mathrm{N}}$. Seules quelques matrices symétriques réelles bien précises sont étudiées en détail.

Le sujet est découpé en 4 parties, la première portant sur l'analyse et les suivantes sur l'algèbre. Seules les deux dernières parties sont vraiment imbriquées.

- La partie A étudie des résultats classiques, en particulier la transformée de Fourier de la gaussienne. C'est l'occasion d'appliquer le théorème de dérivation sous le signe somme et de faire quelques intégrations par parties. La valeur du produit des écarts-types de la fonction gaussienne et de sa transformée de Fourier est calculé. L'énoncé affirme que la valeur minimale de ce produit, pour une fonction non nulle d'une certaine classe, est atteinte pour la gaussienne.
- La partie B s'intéresse soit à des exemples simples (partie I), soit à des résultats généraux relativement accessibles (partie II). Une bonne maîtrise du produit matriciel et des matrices symétriques positives suffit.
- La partie C se penche sur les définitions de l'écart-type matriciel, pour deux exemples. Il y a des questions classiques, comme l'encadrement de $(x \mid f(x))$ lorsque f est auto-adjoint par $\min(\mathrm{Sp}\, f)\|x\|^2$ et $\max(\mathrm{Sp}\, f)\|x\|^2$.
- La partie D poursuit l'étude des couples $(\sigma_{\mathrm{S}}^2(x), \sigma_{\mathrm{M}}^2(x))$ des écarts-types, dans le but d'obtenir une formule explicite pour la courbe bornant la partie inférieure du domaine $\mathcal{R}$. Plusieurs questions sont très élémentaires.

Le sujet est de difficulté modérée, mise à part la question 35 infaisable en temps limité, d'autant plus qu'elle semble nécessiter l'utilisation d'un résultat hors programme. Bien qu'il n'ait pas le temps d'expliciter complètement le thème abordé, celui-ci est intéressant. Les résultats et méthodes utilisées sont classiques. C'est un bon entraînement et une occasion de chercher des questions sans se décourager.

Mathématiques 2

PC

2025

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

4 heures Calculatrice autorisée

Notations

Si a et b sont deux entiers tels que $a \leqslant b$, on note $[\![a,b]\!]$ l'ensemble des entiers k tels que $a \leqslant k \leqslant b$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on appelle polynôme trigonométrique de degré inférieur ou égal à n toute fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ de la forme

$$x \mapsto \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx},$$

où, pour tout $k \in [\![-n,n]\!]$, $c_k \in \mathbb{C}$. On note $\mathcal{T}_n$ l'ensemble des polynômes trigonométriques de degré inférieur ou égal à n. C'est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, ce qu'on ne demande pas de vérifier.

On note $\mathcal{C}^0_{2\pi}$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des fonctions continues 2π-périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ et $\mathcal{C}^1_{2\pi}$ le sous-espace vectoriel des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ 2π-périodiques. Pour $g \in \mathcal{C}^0_{2\pi}$ et $h > 0$, on pose :

$$\omega_g(h) = \sup_{|t-s| \leqslant h} |g(s) - g(t)|.$$

Pour toute fonction bornée f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, on pose :

$$\|f\|_\infty = \sup_{t \in \mathbb{R}} |f(t)|.$$

Partie A – Préliminaires

Q1. Montrer que si g est la fonction sinus, alors, pour tout $h > 0$, $\omega_g(h) \leqslant h$.

Q2. (a) Montrer que, pour tous $g \in \mathcal{C}^0_{2\pi}$ et $h > 0$, $\omega_g(h)$ est un réel bien défini.

(b) On suppose que $g \in \mathcal{C}^1_{2\pi}$. Montrer que, pour tout $h > 0$, $\omega_g(h) \leqslant h\|g'\|_\infty$. En déduire que $\lim\limits_{h \to 0} \omega_g(h) = 0$.

On admet que $\lim\limits_{h \to 0} \omega_g(h) = 0$ *est vrai pour tout* $g \in \mathcal{C}^0_{2\pi}$.

Q3. Soit h et h' deux réels strictement positifs et soit $g \in \mathcal{C}^1_{2\pi}$.

(a) Montrer que, si $h \leqslant h'$, alors $\omega_g(h) \leqslant \omega_g(h')$.

(b) Montrer que $\omega_g(h + h') \leqslant \omega_g(h) + \omega_g(h')$.

(c) En déduire que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1 et pour tout réel λ strictement positif :

$$\omega_g(nh) \leqslant n\omega_g(h) \quad \text{et} \quad \omega_g(\lambda h) \leqslant (1 + \lambda)\omega_g(h).$$

Q4. Soit $g \in \mathcal{C}^0_{2\pi}$. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\int_{-\pi+x}^{\pi+x} g(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\pi}^{\pi} g(t)\,\mathrm{d}t.$$

Q5. Soit $g \in \mathcal{C}^0_{2\pi}$ et $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $p \in \mathcal{T}_n$, on note $\Delta(p)$ la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \Delta(p)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} p(x-t)g(t)\,\mathrm{d}t.$$

Montrer que Δ définit un endomorphisme de $\mathcal{T}_n$.

Centrale Maths 2 PC 2025 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Youssef Yjjou (ENS de Lyon) ; il a été relu par Guillaume Soenen (ENS de Lyon) et Julie Gauthier (professeur agrégé).

Les polynômes trigonométriques sont des objets mathématiques essentiels en analyse de Fourier. Le sujet propose d'en étudier quelques propriétés ainsi que des résultats qui en découlent. L'objectif est de démontrer des théorèmes d'approximation uniforme de certaines fonctions périodiques. La qualité de l'approximation est également considérée, notamment en lien avec le caractère höldérien de la fonction approchée.

- La partie A établit des résultats préliminaires qui seront utilisés dans tout le problème. On s'intéresse d'abord au module de continuité d'une fonction, un outil analytique qui permet de majorer les variations d'une application sur un intervalle de longueur donnée. On met ensuite en valeur le caractère périodique d'une fonction en montrant l'invariance de son intégrale sur une période. Enfin, on s'intéresse à un opérateur qui est un endomorphisme de l'espace des polynômes trigonométriques.
- La partie B s'intéresse à l'approximation uniforme de fonctions périodiques par des polynômes trigonométriques. L'approche est d'abord explicite, et on s'intéresse au calcul d'un polynôme trigonométrique particulier. Celui-ci sert par la suite à construire une fonction J_n bien choisie qui vérifie de nombreuses propriétés, dont une majoration d'intégrale importante pour la suite. Enfin, à l'aide du module de continuité, le résultat d'approximation uniforme est démontré dans le cas $\mathscr{C}^1$ puis $\mathscr{C}^0$.
- La partie C étudie les propriétés d'une fraction rationnelle. On s'intéresse à sa décomposition en éléments simples afin d'en déduire des résultats théoriques. L'objectif final est de majorer la norme de la dérivée d'un polynôme trigonométrique en fonction de la norme du polynôme.
- La partie D introduit les fonctions höldériennes. Après avoir illustré cette notion sur deux exemples à l'aide d'inégalités de convexité, on étudie comment leur régularité peut affecter les résultats établis à la fin de la partie B. On montre enfin une caractérisation des fonctions höldériennes 2π-périodiques à travers la qualité de l'approximation uniforme par des polynômes trigonométriques.

Ce sujet traite donc principalement d'analyse fonctionnelle. C'est un bon sujet pour renforcer sa compréhension de nombreux chapitres d'analyse, notamment les fonctions de la variable réelle, la convexité, l'intégration et les calculs en général. De plus, ce problème propose une partie originale, centrée sur l'étude théorique d'une décomposition en éléments simples, permettant de réviser ce chapitre autrement que par des calculs pratiques. Enfin, si la majorité des questions sont guidées par les questions précédentes, quelques-unes demandent une prise d'initiative. Ce problème permet donc aussi de se confronter à des situations qui nécessitent davantage d'autonomie qu'à l'accoutumée.

A2025 – MATH I PC

ÉCOLE NATIONALE DES PONTS et CHAUSSÉES,
ISAE-SUPAERO, ENSTA PARIS,
TÉLÉCOM PARIS, MINES PARIS,
MINES SAINT-ÉTIENNE, MINES NANCY,
IMT ATLANTIQUE, ENSAE PARIS,
CHIMIE PARISTECH - PSL.

Concours Mines-Télécom,
Concours Centrale-Supélec (Cycle International).

CONCOURS 2025

PREMIÈRE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée de l'épreuve : 3 heures

L'usage de la calculatrice ou de tout dispositif électronique est interdit.

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :

MATHÉMATIQUES I - PC

L'énoncé de cette épreuve comporte 5 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

.

Mines Maths 1 PC 2025 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Guillaume Clerc (ENS de Lyon) ; il a été relu par Quentin Vermande (ENS Ulm) et Thierry Limoges (professeur en CPGE).

La question au centre de ce sujet est : peut-on décrire de façon simple et complète les matrices semblables à leur inverse ? Il s'avère que ces matrices peuvent toutes s'écrire comme le produit de deux matrices de symétries, ce qui constitue le fil conducteur du problème.

- La première partie, purement polynomiale, introduit les notions de polynômes réciproques et antiréciproques. Elle en propose une caractérisation simple.
- La deuxième partie s'intéresse au cas des matrices *diagonalisables*. Dans ce cadre, une caractérisation des matrices semblables à leur inverse est obtenue : leurs polynômes caractéristiques sont soit réciproques, soit antiréciproques. Toutefois, ce résultat ne s'étend pas au cas général.
- La troisième partie introduit une nouvelle classe de matrices : les produits de deux matrices de symétries. Ces matrices jouent un rôle central dans la suite du problème. On prouve qu'elles sont toujours semblables à leur inverse.
- La quatrième partie est consacrée aux blocs de Jordan $\mathrm{J}_n(\lambda)$, notamment au cas particulier $\mathrm{J}_n(1)$. On démontre que ce bloc peut être écrit comme le produit de deux matrices de symétries. Ce résultat, technique, constitue un point clé pour aborder la dernière partie.
- La dernière partie repose sur la réduction de Jordan (admise ici). On établit que toute matrice semblable à son inverse peut s'écrire comme le produit de deux matrices de symétries, ce qui fournit une caractérisation complète.

Ce problème conforme au programme d'algèbre linéaire de PC mobilise des outils variés : étude de polynômes, réduction des endomorphismes, étude du spectre, diagonalisabilité, matrices de symétrie. Il aborde aussi des notions ne figurant pas au programme, comme la réduction de Jordan. Les trois premières parties sont d'une difficulté moyenne et permettent de tester ses connaissances. Les deux dernières demandent de s'adapter à de nouvelles notions. La dernière question se distingue par son niveau plus élevé.

A2025 – MATH II PC

ÉCOLE NATIONALE DES PONTS et CHAUSSÉES,
ISAE-SUPAERO, ENSTA PARIS,
TÉLÉCOM PARIS, MINES PARIS,
MINES SAINT-ÉTIENNE, MINES NANCY,
IMT ATLANTIQUE, ENSAE PARIS,
CHIMIE PARISTECH - PSL.

Concours Mines-Télécom,
Concours Centrale-Supélec (Cycle International).

CONCOURS 2025

DEUXIÈME ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée de l'épreuve : 3 heures

L'usage de la calculatrice ou de tout dispositif électronique est interdit.

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :

MATHÉMATIQUES II - PC

L'énoncé de cette épreuve comporte 6 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

.

Mines Maths 2 PC 2025 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Angèle Niclas (enseignant-chercheur à l'université) ; il a été relu par Julie Gauthier (professeur agrégé) et Sélim Cornet (professeur en CPGE).

Ce sujet étudie une famille de séries appelées congruo-harmoniques. Pour deux paramètres $(p, q) \in (\mathbb{N}^*)^2$, on définit son terme général u_k par

$$\forall k \geqslant 0 \qquad u_k = \frac{(-1)^k}{pk+q}$$

On s'intéresse en particulier à la somme de cette série, notée $\mathrm{S}_{p,q}$, dont on cherche plusieurs expressions pour permettre son calcul.

- Une partie préliminaire permettait de vérifier que le candidat connaissait ses classiques, comme le théorème spécial des séries alternées.
- Dans la partie 1, on cherche à exprimer $\mathrm{S}_{p,q}$ sous forme intégrale. Pour cela, on introduit l'intégrale à paramètre

  $$\mathrm{I}_{p,q}(t) = \int_0^1 \frac{x^{(t+1)p/q}}{1 + x^{p/q}}\ \mathrm{d}x$$

  et on s'intéresse à sa limite lorsque t tend vers $+\infty$.
- La deuxième partie, plus longue, propose d'exprimer explicitement $\mathrm{S}_{p,q}$ dans trois cas particuliers : lorsque $p = q$, lorsque $p < q$ avec p qui divise q, et lorsque $p > q$. Les deux premiers cas sont traités assez facilement grâce aux résultats préliminaires, tandis que le troisième demande davantage de travail, notamment pour la décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle

  $$\mathrm{F}(\mathrm{X}) = \frac{\mathrm{X}^{q-1}}{1 + \mathrm{X}^p}$$

  dont l'expression dépend de la parité de p.
- La troisième partie est indépendante des précédentes. Son objectif est d'estimer la probabilité, en tirant uniformément p et q dans $[\![1 ; n]\!]$, que l'on se trouve dans l'un des trois cas considérés en partie 2. Elle fait notamment appel à des raisonnements de dénombrement.
- Enfin, la dernière partie, plus courte, s'intéresse à la vitesse de convergence de la série $\sum u_k$ en déterminant un équivalent de l'intégrale $\mathrm{I}_{p,q}(n)$ lorsque n tend vers l'infini.

Ce sujet mobilise de nombreux résultats du programme, aussi bien de première que de deuxième année. Bien qu'aucune question ne soit véritablement difficile, certains calculs exigent une bonne maîtrise technique. On notera en particulier que la décomposition en éléments simples de F, ainsi que les calculs qui en découlent, se situent à la limite du programme de PC et ont pu déstabiliser certains candidats. Le sujet vérifie surtout la connaissance et la bonne compréhension des théorèmes usuels, et il peut servir de sujet de révision générale.

A2025 – INFO COMMUNE

ÉCOLE NATIONALE DES PONTS et CHAUSSÉES,
ISAE-SUPAERO, ENSTA PARIS,
TÉLÉCOM PARIS, MINES PARIS,
MINES SAINT-ÉTIENNE, MINES NANCY,
IMT ATLANTIQUE, ENSAE PARIS,
CHIMIE PARISTECH - PSL.

Concours Mines-Télécom,
Concours Centrale-Supélec (Cycle International).

CONCOURS 2025

ÉPREUVE D'INFORMATIQUE COMMUNE

Durée de l'épreuve : 2 heures

L'usage de la calculatrice ou de tout dispositif électronique est interdit.

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :

INFORMATIQUE COMMUNE

Cette épreuve est commune aux candidats des filières MP, PC et PSI.

L'énoncé de cette épreuve comporte 14 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

.

Mines Informatique MP-PC-PSI 2025 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Cyril Ravat (professeur en CPGE) ; il a été relu par Sarah Houdaigoui (ENS Ulm) et Benjamin Monmege (enseignant-chercheur à l'université).

Le sujet aborde le problème du sac à dos, un classique de l'optimisation où l'on doit choisir des objets selon leur poids et leur valeur pour les emporter dans un sac de capacité limitée, en maximisant la valeur totale. Il décrit puis compare cinq algorithmes différents permettant de trouver une solution.

- Dans la partie I, on aborde le traitement des bases de données dans le cas de navires de fret. Comme bien souvent, ce type de partie totalement déconnectée du reste du sujet n'est qu'un prétexte à la rédaction de quelques requêtes plus ou moins triviales.
- La partie II demande l'écriture de deux fonctions élémentaires permettant de calculer la valeur d'une collection d'objets et de vérifier que celle-ci satisfait la contrainte de poids.
- Le remplissage du sac peut être modélisé par un arbre binaire. La partie III utilise cette structure pour proposer l'écriture d'un algorithme naïf de résolution du problème, de complexité hélas exponentielle.
- La partie IV définit et applique un algorithme glouton sur un exemple simple de trois objets. La complexité de l'algorithme est analysée.
- Dans la partie V, on utilise la programmation dynamique. Le code est ici entièrement fourni, seule une application sur l'exemple est demandée.
- La partie VI utilise la structure d'arbre binaire pour appliquer un algorithme par séparation et évaluation, qui consiste à élaguer les branches inutiles de l'arbre.
- Un dernier algorithme, plus complexe, est développé dans la partie VII. Il s'agit d'une « optimisation par colonies de fourmis », qui reproduit le comportement biologique de ces insectes dans l'élaboration de la solution. La structure générale du code est proposée et on demande de la compléter.
- La dernière partie permet de comparer les résultats des différents algorithmes sur une situation plus complexe que l'exemple traité précédemment.

Cette épreuve traite avec cohérence un problème classique, avec des algorithmes connus et d'autres plus originaux. De nombreuses questions demandent d'exécuter du code sur de petits exemples. Si le découpage en nombreuses parties rend le sujet quelque peu haché, l'optimisation par colonies de fourmis est bien amenée et travaillée en profondeur. On peut regretter l'utilisation d'arbres binaires, outil hors programme dont le vocabulaire et les spécificités étaient inconnus de la plupart des candidats.

ECOLE POLYTECHNIQUE - ESPCI
ECOLES NORMALES SUPERIEURES

CONCOURS D'ADMISSION 2025

LUNDI 14 AVRIL 2025
08h00 - 12h00

FILIERE PC - Epreuve n° 1

MATHEMATIQUES (XEULS)

Durée : 4 heures

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve

X/ENS Maths PC 2025 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Julie Gauthier (professeur agrégé) ; il a été relu par Denis Conduché (professeur en CPGE) et Gilbert Monna (professeur honoraire en CPGE).

Dans ce sujet, on étudie le lien entre les valeurs propres d'une matrice A et celles de la somme B de cette matrice avec une matrice de rang 1. Les parties I et II sont indépendantes et servent de fondations pour les trois suivantes.

- Dans la partie I, on s'intéresse aux matrices de rang 1. En particulier, on établit une condition nécessaire et suffisante sur leur forme : elles s'écrivent comme le produit d'une matrice colonne par une matrice ligne.
- L'objectif de la partie II est d'établir une formule liant le déterminant des matrices A et B dans le cas où A est inversible, puis de donner une seconde formule pour calculer l'inverse de B lorsque celle-ci est également inversible.
- Dans la partie III, on traite le cas des matrices symétriques. On s'intéresse aux liens entre les valeurs propres de A et de B dans deux cas particuliers.
- Dans la partie IV, la matrice A est supposée symétrique. La matrice B est obtenue en ajoutant à A la matrice UU^{T} où U est un vecteur aléatoire à valeurs dans une base orthonormée (donc un ensemble fini) et qui suit une loi uniforme. On s'intéresse alors à l'espérance de la variable aléatoire $\chi_{\mathrm{B}}(x)$ où x est un réel fixé.
- Après avoir admis un résultat qui, au regard de la partie III, semble naturel, le but de la partie V est d'approfondir les résultats de la partie III sur les valeurs propres de la matrice B lorsque A est symétrique mais non inversible.

Le début du sujet est très proche du cours. On utilise ensuite des résultats classiques d'algèbre linéaire et bilinéaire, thèmes que ce problème permet de bien réviser. La résolution est fluide et naturelle.

ECOLE POLYTECHNIQUE - ESPCI
ECOLES NORMALES SUPERIEURES

CONCOURS D'ADMISSION 2025

JEUDI 17 AVRIL 2025
16h30 - 18h30

FILIERES MP-PC-PSI
Epreuve n° 8
INFORMATIQUE B (XELSR)

Durée : 2 heures

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve

X/ENS Informatique B MP-PC-PSI 2025 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Sarah Houdaigoui (ENS Ulm) ; il a été relu par Virgile Andreani (ENS Ulm) et Cyril Ravat (professeur en CPGE).

Le sujet examine le jeu de Röckse qui consiste à trouver, dans une grille de taille $N \times N$ contenant des gains et des pénalités, un chemin optimal partant de $(0, 0)$ et arrivant à $(N-1, N-1)$. Il se compose de quatre parties, de difficulté globalement croissante, et dont la dernière est indépendante des autres.

- La partie I vise à écrire plusieurs fonctions simples permettant de se familiariser avec le jeu. Une propriété des sauts autorisés dans la grille est également définie.
- La partie suivante tente une recherche exhaustive en explorant tous les chemins possibles d'une certaine longueur. Une analyse de complexité permet de montrer l'inefficacité de cet algorithme pour des chemins longs. On utilise ensuite brièvement la programmation dynamique pour améliorer la complexité de l'algorithme.
- La partie III propose de résoudre le problème à l'aide d'un algorithme glouton. Elle ne comporte que deux questions.
- La dernière partie est indépendante des trois autres. L'utilisation de codes binaires est abordée afin de stocker efficacement les cases bonus rencontrées. Le sujet guide ensuite progressivement le candidat dans la construction d'un algorithme de programmation dynamique : déterminer la formule de récurrence, énumérer l'ensemble des codes binaires possibles, compléter le code de la fonction principale, donner sa complexité et, finalement, extraire de la table de programmation dynamique le chemin optimal.

Le sujet se focalise sur l'algorithmique des listes. Il permet notamment de travailler les algorithmes de recherche exhaustive et leur complexité (partie II) et les algorithmes gloutons (partie III). La dernière partie comporte des questions de natures variées et, bien que progressive et guidée, elle demande une compréhension fine de la programmation dynamique. Certaines questions sont de haut niveau.