PSI
Mathématiques · Informatique
2025

Sous la coordination de

William AUFORT
professeur en CPGE
ancien élève de l'École Normale Supérieure (de Lyon)

Benjamin MONMEGE
enseignant-chercheur à l'université
ancien élève de l'École Normale Supérieure (Paris-Saclay)

Vincent PUYHAUBERT
professeur en CPGE
ancien élève de l'École Normale Supérieure (Paris-Saclay)

Par

Virgile ANDREANI
ENS Ulm

Céline CHEVALIER
enseignant-chercheur à l'université

Guillaume CLERC
ENS de Lyon

Jan-Luka FATRAS
ENS Paris-Saclay

Vincent FERRARI-DOMINGUEZ
ENS Ulm

Sarah HOUDAIGOUI
ENS Ulm

Vincent LEROUVILLOIS
ENS de Lyon

Cyril RAVAT
professeur en CPGE

Théo TERNIER
professeur agrégé

Bertrand WIEL
professeur en CPGE

Sommaire

Mines-Ponts

Polytechnique-ENS

Formulaires

SESSION 2025 **PSI8M**

e3a POLYTECH

ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE PSI

MATHÉMATIQUES

Durée : 4 heures

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

RAPPEL DES CONSIGNES

- *Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, bleu clair ou turquoise, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.*
- *Ne pas utiliser de correcteur.*
- *Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.*

Les calculatrices sont interdites.

Le sujet est composé de trois exercices indépendants.

e3a Mathématiques PSI 2025 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Vincent Lerouvillois (professeur agrégé à l'université) ; il a été relu par William Gregory (étudiant en Master) et Sélim Cornet (professeur en CPGE).

Le sujet propose trois exercices indépendants abordant des thèmes variés : séries de fonctions, vecteurs propres d'un endomorphisme de polynômes, étude des points critiques d'une fonction de plusieurs variables, diagonalisation d'une matrice et résolution d'un système différentiel.

- Dans l'exercice 1, on étudie la somme d'une série de fonctions et certaines de ses propriétés, qui sont obtenues par des théorèmes classiques d'interversion.
- Dans l'exercice 2, on établit une relation de récurrence pour une suite de polynômes définis en tant que vecteurs propres d'un certain endomorphisme. La dernière partie de l'exercice relie, de façon élégante, les racines de ces polynômes à l'ensemble des points critiques d'une fonction de plusieurs variables.
- Le dernier exercice est un classique d'algèbre linéaire dans lequel on diagonalise une matrice réelle symétrique. Les dernières questions en proposent une application consistant à résoudre un système différentiel linéaire à coefficients constants.

Le sujet couvre une bonne partie du programme d'analyse et d'algèbre de PSI. Si les exercices 1 et 3 sont très classiques et ne présentent pas de réelle difficulté, l'exercice 2, plus long et plus original, comporte quelques questions (sur les endomorphismes de polynômes) qui nécessitent davantage de recul.

SESSION 2025 **PSI1M**

CONCOURS COMMUN INP

ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE PSI

MATHÉMATIQUES

Durée : 4 heures

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

RAPPEL DES CONSIGNES

- *Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, bleu clair ou turquoise, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.*
- *Ne pas utiliser de correcteur.*
- *Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.*

Les calculatrices sont interdites.

Le sujet est composé d'un exercice et de deux problèmes indépendants.

CCINP Maths PSI 2025 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Bertrand Wiel (professeur en CPGE) ; il a été relu par Guillaume Clerc (ENS de Lyon) et Simon Billouet (professeur en CPGE).

L'épreuve est constituée d'un exercice de probabilités et de deux problèmes, l'un d'analyse portant sur les séries de Fourier et de nature calculatoire, l'autre d'algèbre autour de l'inégalité de Hadamard. Il s'agit d'une majoration du déterminant d'une matrice à l'aide du produit des normes euclidiennes de ses colonnes. On peut lui trouver un point commun avec l'inégalité de Cauchy-Schwarz car elle majore une forme n-linéaire par le produit de n normes.

- Dans le premier exercice, on établit deux majorations de la quantité $\mathrm{P}(\mathrm{X} \geqslant 2\lambda)$, où X est une variable aléatoire suivant une loi de Poisson, à l'aide des inégalités de concentration et de la fonction génératrice de X. Une étude de fonction permet de déterminer laquelle des deux majorations est la plus précise.
- Le premier problème est divisé en deux parties. La première consiste à calculer le développement en série de Fourier d'une fonction continue par morceaux de période 2π. Dans la seconde, on vérifie la convergence simple de cette série vers la fonction d'origine en utilisant des outils élémentaires de sommation, de calcul intégral et de trigonométrie.
- La second problème, le plus long, est divisé en trois parties. La première explore le cas d'égalité de l'inégalité arithmético-géométrique à l'aide des propriétés de la fonction exponentielle. La deuxième fait intervenir des matrices symétriques définies positives pour justifier l'inégalité de Hadamard dans le cas général et identifier le cas d'égalité. Signalons que l'énoncé comporte une erreur concernant le cas d'égalité, heureusement sans conséquence sur la suite. Les outils mis en œuvre dans cette partie sont le théorème spectral ainsi que les propriétés du déterminant et de la trace d'une matrice.

  Cette partie s'achève par l'étude la valeur maximale prise par le déterminant d'une matrice à coefficients dans $[-1\,;1]$. Elle est atteinte pour un ensemble de matrices appelées matrices de Hadamard, dont on étudie certaines propriétés élémentaires dans la dernière partie à partir de leur propriété fondamentale

  $$\mathrm{M}\mathrm{M}^\top = n\mathrm{I}_n$$

  et de sa traduction en termes de produits scalaires sur les colonnes. On établit enfin une condition suffisante puis une condition nécessaire sur n pour qu'il existe des matrices de Hadamard de taille n.

L'ensemble est conforme aux sujets récents du concours CCINP en filière PSI, il couvre tous les grands domaines du programme, sans difficulté théorique. Il est suffisamment long pour permettre à un candidat de ne pas rester bloqué sur un sujet qu'il maîtrise moins et montrer son savoir-faire sur un autre où il se sent plus à l'aise. La difficulté technique est bien équilibrée et raisonnable. On peut regretter une utilisation trop rare des théorèmes au programme, en particulier ceux de seconde année, très souvent ignorés dans cet énoncé.

Ce sujet qui explore des thèmes classiques et intéressants constitue un entraînement technique de niveau très raisonnable, utile en début de préparation aux épreuves du concours CCINP.

SESSION 2025 **PSI5IN**

ÉPREUVE MUTUALISÉE AVEC E3A-POLYTECH

ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE PSI

INFORMATIQUE

Durée : 3 heures

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

RAPPEL DES CONSIGNES

- *Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, bleu clair ou turquoise, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.*
- *Ne pas utiliser de correcteur.*
- *Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.*

Les calculatrices sont interdites.

Le sujet est composé de trois parties.

L'épreuve est à traiter en langage **Python** sauf pour les bases de données.
Les différents algorithmes doivent être rendus dans leur forme définitive sur le **Document Réponse** dans l'espace réservé à cet effet en respectant les éléments de syntaxe du langage (les brouillons ne sont pas acceptés).
La réponse ne doit pas se limiter à la rédaction de l'algorithme sans explication, les programmes doivent être expliqués et commentés de manière raisonnable.

Énoncé et Annexe : 16 pages
Document Réponse (DR) : 11 pages

Seul le Document Réponse (DR) doit être rendu dans son intégralité (le QR Code doit être collé sur la première page du DR.

CCINP Informatique PSI 2025 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Virgile Andreani (ENS Ulm) ; il a été relu par Cyril Ravat (professeur en CPGE) et Benjamin Monmege (enseignant-chercheur à l'université).

Ce sujet a pour thème la randonnée. On utilise une base de données de chemins, on analyse des traces GPS, puis on passe à la conception de randonnées de plusieurs journées à partir d'un graphe de chemins. De larges aspects du programme sont mobilisés : bases de données, analyse de données numériques et algorithmes de graphes, en particulier celui de Dijkstra dont on voit une version améliorée. Les questions de programmation ne consistent quasiment qu'à compléter des fonctions à trous et sont abordables. Ce sont plutôt les démonstrations et l'exécution de code sur papier qui demandent une très bonne compréhension des algorithmes impliqués.

- La partie I est consacrée à des questions de SQL, dont certaines sont mal posées voire piégeuses : pour plusieurs d'entre elles, la solution vraisemblablement attendue ne répondait pas totalement à la question.
- La partie II ne pose pas de difficulté particulière, elle teste la maîtrise de la programmation en Python et des structures de données du langage.
- La partie III est consacrée aux graphes et en particulier à l'algorithme de Dijkstra. Elle en propose une variante bidirectionnelle qui permet d'économiser la visite de certains sommets dans certains cas, et dont il s'agit finalement de prouver la correction partielle.

Ce sujet varié est intéressant pour réviser les chapitres utilisés. Comme les années précédentes, les réponses se font exclusivement sur un document réponse unique, ce qui peut perturber : la place disponible pour chaque explication et chaque code est fortement contrainte, et toute erreur conduisant à une réécriture massive devient une catastrophe. Nous vous conseillons donc de vous entraîner au cours de l'année à rendre des copies propres et sans ratures.

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

Mathématiques 1

PSI

4 heures Calculatrice autorisée

2025

Conditionnement d'une matrice et applications

Dans tout ce problème, n désigne un entier naturel non nul, et on rappelle que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices carrées à n lignes et n colonnes. On note $\mathrm{D}_n(\mathbb{R})$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ des matrices diagonales.

On rappelle que l'on désigne par $M^\top$ la transposée d'une matrice M.

Pour alléger les notations, on identifiera les vecteurs de $\mathbb{R}^n$ aux matrices colonnes de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

On désignera par $\mathcal{B} = (E_1, E_2, \ldots, E_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

On munit $\mathbb{R}^n$ de la norme $\|\cdot\|$, en posant pour tout $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$ qui est la norme euclidienne associée au produit scalaire canonique $\langle \cdot, \cdot \rangle$ de $\mathbb{R}^n$ où par définition, pour tout X et Y de $\mathbb{R}^n$, $\langle X, Y \rangle = X^\top Y$.

Pour toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ on note $\rho(M)$ le réel défini par : $\rho(M) = \max_{\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(M)} |\lambda|$.

On note par ailleurs $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques positives de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et par $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques définies positives de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Partie A – Construction d'une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

On se propose dans cette partie de montrer que l'application N donnée sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par :

$$N : A \longmapsto \sup_{\|X\|=1} \|AX\|$$

est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et d'en étudier quelques propriétés.

I – Étude de l'application N

Dans toute cette partie, on considère A une matrice quelconque de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont on note L_1, L_2, …, L_n les n lignes et C_1, C_2, …C_n les n colonnes, que l'on pourra identifier à des éléments de $\mathbb{R}^n$.

Q1. Soit $X \in \mathbb{R}^n$ tel que $\|X\| = 1$. En notant $M = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \|L_i\|$, montrer que :

$$\|AX\| \leqslant M\sqrt{n}.$$

On pourra au préalable s'intéresser à la i^{e} ligne de la matrice AX et utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour les vecteurs de $\mathbb{R}^n$.

Q2. En déduire que l'application N est bien définie, puis que : $N(A) = \sup_{X_0 \neq 0} \dfrac{\|AX_0\|}{\|X_0\|}$.

Q3. Montrer que l'application N ainsi définie est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Q4. En est-il de même pour l'application $S : \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ M & \longmapsto & \rho(M) \end{array} \right.$?

Q5. Soit $\Delta \in \mathrm{D}_n(\mathbb{R})$ dont on note δ_1, …, δ_n les termes diagonaux.

Vérifier que $N(\Delta) = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |\delta_i|$.

Centrale Maths 1 PSI 2025 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Théo Ternier (professeur agrégé) ; il a été relu par Thierry Limoges (professeur en CPGE) et Angèle Niclas (enseignant-chercheur à l'université).

Lorsqu'on considère un système linéaire $\mathrm{A}x = b$, d'inconnue x avec A une matrice inversible, il est important de comprendre comment des perturbations, même faibles, de la matrice A, peuvent affecter la solution. Le conditionnement de la matrice A fournit un indicateur de sa sensibilité.

Le sujet étudie cette notion pour une certaine norme subordonnée N et la calcule dans des cas particuliers, comme les matrices orthogonales et les matrices symétriques définies positives. Ce dernier point permet de démontrer l'inégalité de Kantorovich, utilisée pour analyser la convergence de certaines méthodes de gradient à pas optimal.

- La première partie définit une norme subordonnée N et étudie ses propriétés. Elle prouve, dans la partie A.I, que N est bien une norme, et qu'elle est notamment sous-multiplicative. La sous-partie A.II permet le calcul explicite de N pour les matrices orthogonales et pour les matrices symétriques.
- La deuxième partie introduit la notion de conditionnement d'une matrice à partir de la norme N. Elle démontre, dans la partie B.I, quelques résultats utiles liés à ce concept, puis développe dans la partie B.II un exemple de minoration du conditionnement d'une matrice. Ce dernier point met en évidence que cond(A) peut devenir arbitrairement grand lorsque la taille de A augmente.
- La troisième partie permet de calculer explicitement le conditionnement d'une matrice inversible et présente une forme encore plus favorable pour les matrices symétriques définies positives.
- La quatrième partie aborde le calcul du conditionnement d'une matrice donnée en exploitant ses valeurs propres.
- Enfin, la dernière partie propose deux démonstrations distinctes de l'inégalité de Kantorovich. La première utilise l'inégalité de Cauchy-Schwarz, tandis que la seconde s'appuie sur les probabilités discrètes.

Comme on le voit, ce problème est centré sur le programme d'algèbre de PSI, notamment les espaces vectoriels normés en dimension finie et la réduction des matrices. Il aborde notamment le cas des normes subordonnées qui, bien que ne figurant pas explicitement au programme, sont néanmoins classiques. Ce sujet constitue un très bon entraînement sur l'algèbre en général et sur le chapitre des normes en particulier.

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

Mathématiques 2

PSI

4 heures Calculatrice autorisée

2025

Attribution d'une valeur à des séries divergentes

Le 23 février 1913 Srinivasa Ramanujan écrivit une lettre au mathématicien Godfrey Hardy dans laquelle il présenta une théorie selon laquelle la somme infinie $1+2+\cdots+n+\cdots$ vaut $-\frac{1}{12}$. S'en est suivi tout un ensemble de recherches sur ce sujet...

L'objectif de ce problème est de présenter quelques situations où l'on attribue une valeur finie à "une somme infinie". On s'interesse en particulier au cas de la série de terme général n. Dans la première partie sont présentées deux situations qui dans les deux cas font apparaître la valeur $-\frac{1}{12}$, ce qui montre que cette valeur ne semble pas être fortuite. La deuxième partie traite plus particulièrement de la façon dont Ramunajan a étudié les sommes infinies en s'appuyant sur la formule de Euler-Maclaurin. La valeur qu'il octroie à ces sommes étant en quelque sorte un terme de compensation entre une somme et une intégrale. Enfin la troisième partie consiste à établir des développements dits tayloriens généralisés.

Notations et définition

On note, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\lfloor x \rfloor$ la partie entière de x. On rappelle qu'il s'agit de l'unique entier qui satisfait $x-1 < \lfloor x \rfloor \leqslant x$.

On dira qu'une fonction φ définie sur $\mathbb{R}^+$ est à support compact dans $\mathbb{R}^+$ lorsqu'il existe un réel $K \geqslant 0$ tel que pour tout $t \geqslant K$, $\varphi(t) = 0$.

Partie A – Deux approches pour une valeur à 1+2+$\cdots$+ n + $\cdots$

I – Une première approche

Soit f la fonction définie par $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-nx}$, où $x \in \mathbb{R}$.

Q1. Déterminer l'ensemble de définition D_f de f puis calculer $f(x)$ pour tout $x \in D_f$.

Q2. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur D_f et calculer $f'(x)$ pour tout $x \in D_f$.

Q3. À l'aide de développements limités en 0, déterminer trois constantes réelles a, b et c telles qu'au voisinage de 0 $\dfrac{e^{-x}}{(1-e^{-x})^2} = \dfrac{a}{x^2} + \dfrac{b}{x} + c + o(1)$.

Q4. En déduire $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} n e^{-nx} - \frac{1}{x^2}\right)$.

II – Une deuxième approche

On considère dans cette partie une fonction φ de classe $\mathcal{C}^\infty$ à support compact dans $\mathbb{R}^+$ et telle que $\varphi(0) = 1$. Soit $K > 0$ telle que φ soit nulle sur $[K, +\infty[$. On pose ψ la fonction telle que pour tout $t \geqslant 0$, $\psi(t) = t\varphi(t)$. On peut alors observer que ψ ainsi que toutes ses dérivées sont nulles sur $[K, +\infty[$.

Centrale Maths 2 PSI 2025 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Céline Chevalier (enseignant-chercheur à l'université) ; il a été relu par Vincent Lerouvillois (ENS de Lyon) et Benjamin Monmege (enseignant-chercheur à l'université).

Ce sujet s'inspire de la lettre que Srinivasa Ramanujan adressa en 1913 à Godfrey Hardy pour lui présenter sa théorie selon laquelle la somme infinie $1+2+\cdots+n+\cdots$ était égale à $-1/12$. À partir de cet exemple historique, ce problème présente quelques situations dans lesquelles on peut attribuer une valeur finie à une somme infinie divergente, en particulier dans le cas de la série de terme général n.

- La première partie présente deux situations qui font apparaître la mystérieuse valeur $-1/12$, qui ne semble donc pas être fortuite. Il s'agit d'analyse classique, utilisant des outils et techniques standards comme les développements limités, des calculs et limites de sommes et d'intégrales, ou encore les formules de Taylor.
- La deuxième partie s'appuie sur les travaux menés par Ramanujan sur les sommes infinies à partir de la formule d'Euler-Maclaurin. L'énoncé constate que la valeur attribuée à ces sommes est en fait un terme qui compense la différence entre une somme et une intégrale, ce qui permet de définir la constante de Ramanujan. Cette partie utilise les mêmes outils d'analyse que la première et introduit également une suite de polynômes.
- Enfin, la troisième partie établit des développements dits « tayloriens généralisés », qui peuvent être vus comme des extensions des formules de Taylor. Les principaux résultats sont établis aux questions 30 à 35. La question 36, plus fastidieuse, les exploite dans un cas particulier. De même, la dernière sous-partie applique tous ces résultats à une nouvelle famille de polynômes. Cela demande essentiellement de vérifier que les hypothèses des parties précédentes sont valides et de bien mener les calculs.

Ce sujet n'est pas difficile mais il est très calculatoire. En particulier, il est nécessaire de bien savoir manipuler les sommes et les intégrales. Peu de théorèmes d'analyse sont utilisés, mais il peut constituer un bon problème de révision pour ce type de manipulations et de calculs.

A2025 – MATH I PSI

Concours commun
Mines-Ponts

**ÉCOLE NATIONALE DES PONTS et CHAUSSÉES,
ISAE-SUPAERO, ENSTA PARIS,
TÉLÉCOM PARIS, MINES PARIS,
MINES SAINT-ÉTIENNE, MINES NANCY,
IMT ATLANTIQUE, ENSAE PARIS,
CHIMIE PARISTECH - PSL.**

**Concours Mines-Télécom,
Concours Centrale-Supélec (Cycle International).**

CONCOURS 2025

PREMIÈRE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée de l'épreuve : 3 heures

L'usage de la calculatrice ou de tout dispositif électronique est interdit.

*Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente
sur la première page de la copie :*

MATHÉMATIQUES I - PSI

L'énoncé de cette épreuve comporte 5 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

.

Mines Maths 1 PSI 2025 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Guillaume Clerc (ENS de Lyon) ; il a été relu par Quentin Vermande (ENS Ulm) et Thierry Limoges (professeur en CPGE).

La question au centre de ce sujet est : peut-on décrire de façon simple et complète les matrices semblables à leur inverse ? Il s'avère que ces matrices peuvent toutes s'écrire comme le produit de deux matrices de symétries, ce qui constitue le fil conducteur du problème.

- La première partie, purement polynomiale, introduit les notions de polynômes réciproques et antiréciproques. Elle en propose une caractérisation simple.
- La deuxième partie s'intéresse au cas des matrices *diagonalisables.* Dans ce cadre, une caractérisation des matrices semblables à leur inverse est obtenue : leurs polynômes caractéristiques sont soit réciproques, soit antiréciproques. Toutefois, ce résultat ne s'étend pas au cas général.
- La troisième partie introduit une nouvelle classe de matrices : les produits de deux matrices de symétries. Ces matrices jouent un rôle central dans la suite du problème. On prouve qu'elles sont toujours semblables à leur inverse.
- La quatrième partie est consacrée aux blocs de Jordan $\mathrm{J}_n(\lambda)$, notamment au cas particulier $\mathrm{J}_n(1)$. On démontre que ce bloc peut être écrit comme le produit de deux matrices de symétries. Ce résultat, technique, constitue un point clé pour aborder la dernière partie.
- La dernière partie repose sur la réduction de Jordan (admise ici). On établit que toute matrice semblable à son inverse peut s'écrire comme le produit de deux matrices de symétries, ce qui fournit une caractérisation complète.

Ce problème conforme au programme d'algèbre linéaire de PC mobilise des outils variés : étude de polynômes, réduction des endomorphismes, étude du spectre, diagonalisabilité, matrices de symétrie. Il aborde aussi des notions ne figurant pas au programme, comme la réduction de Jordan. Les trois premières parties sont d'une difficulté moyenne et permettent de tester ses connaissances. Les deux dernières demandent de s'adapter à de nouvelles notions. La dernière question se distingue par son niveau plus élevé.

A2025 – MATH II PSI

Concours commun
Mines-Ponts

**ÉCOLE NATIONALE DES PONTS et CHAUSSÉES,
ISAE-SUPAERO, ENSTA PARIS,
TÉLÉCOM PARIS, MINES PARIS,
MINES SAINT-ÉTIENNE, MINES NANCY,
IMT ATLANTIQUE, ENSAE PARIS,
CHIMIE PARISTECH - PSL.**

**Concours Mines-Télécom,
Concours Centrale-Supélec (Cycle International).**

CONCOURS 2025

DEUXIÈME ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée de l'épreuve : 3 heures

L'usage de la calculatrice ou de tout dispositif électronique est interdit.

*Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente
sur la première page de la copie :*

MATHÉMATIQUES II - PSI

L'énoncé de cette épreuve comporte 8 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

.

Mines Maths 2 PSI 2025 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Jan-Luka Fatras (ENS Paris-Saclay) ; il a été relu par Théo Ternier (professeur agrégé) et Gilbert Monna (professeur honoraire en CPGE).

Ce sujet d'analyse étudie l'équation différentielle non linéaire

$$(\mathrm{E}) : \quad y'(x) + y(x) + 1 = \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{\,y(x)}$$

On ne peut que très rarement résoudre explicitement ce type d'équations. En cherchant une solution sous la forme d'une série de Dirichlet, ce sujet propose une manière d'approximer la solution de (E). Celle-ci est ensuite utilisée pour étudier un modèle de propagation d'une épidémie.

- Dans la partie I, l'équation différentielle est linéarisée. Après avoir résolu l'équation différentielle linéaire, on procède à une étude qualitative de la solution de l'équation différentielle non linéaire.
- Les séries de Dirichlet sont ensuite introduites dans la partie II. On y démontre des résultats généraux sur la somme de ce type de séries. De nombreux résultats sur les séries de fonctions sont mis en œuvre.
- Dans la partie III, on suppose que la solution de notre problème de Cauchy est donnée par une série de Dirichlet et on en déduit des informations sur les coefficients de la série.
- Dans la partie IV, on approxime la solution en tronquant la série de Dirichlet. Un procédé est ensuite établi pour approximer les coefficients de la série. Des résultats d'algèbre linéaire sont utiles pour cette partie.
- Ensuite, on étudie dans la partie V un système d'équations différentielles non linéaires qui modélise la propagation d'une épidémie. La solution de ce problème est ramenée à la solution de l'équation différentielle précédente.
- Enfin, un modèle probabiliste modélisant lui aussi la propagation d'une épidémie est introduit dans la partie VI.

Ce sujet mobilise de nombreux chapitres des programmes des deux années : équations différentielles linéaires, étude de fonctions, séries de fonctions, systèmes linéaires, probabilités. À ce titre, il constitue un excellent exercice de révision transversale.

Les parties ne sont pas indépendantes. Des questions très abordables côtoient des questions difficiles. L'intégration des résultats qualitatifs sur l'équation différentielle non linéaire dans la résolution est délicate.

A2025 – INFO COMMUNE

ÉCOLE NATIONALE DES PONTS et CHAUSSÉES,
ISAE-SUPAERO, ENSTA PARIS,
TÉLÉCOM PARIS, MINES PARIS,
MINES SAINT-ÉTIENNE, MINES NANCY,
IMT ATLANTIQUE, ENSAE PARIS,
CHIMIE PARISTECH - PSL.

Concours Mines-Télécom,
Concours Centrale-Supélec (Cycle International).

CONCOURS 2025

ÉPREUVE D'INFORMATIQUE COMMUNE

Durée de l'épreuve : 2 heures

L'usage de la calculatrice ou de tout dispositif électronique est interdit.

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :

INFORMATIQUE COMMUNE

Cette épreuve est commune aux candidats des filières MP, PC et PSI.

L'énoncé de cette épreuve comporte 14 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

.

Mines Informatique MP-PC-PSI 2025 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Cyril Ravat (professeur en CPGE) ; il a été relu par Sarah Houdaigoui (ENS Ulm) et Benjamin Monmege (enseignant-chercheur à l'université).

Le sujet aborde le problème du sac à dos, un classique de l'optimisation où l'on doit choisir des objets selon leur poids et leur valeur pour les emporter dans un sac de capacité limitée, en maximisant la valeur totale. Il décrit puis compare cinq algorithmes différents permettant de trouver une solution.

- Dans la partie I, on aborde le traitement des bases de données dans le cas de navires de fret. Comme bien souvent, ce type de partie totalement déconnectée du reste du sujet n'est qu'un prétexte à la rédaction de quelques requêtes plus ou moins triviales.
- La partie II demande l'écriture de deux fonctions élémentaires permettant de calculer la valeur d'une collection d'objets et de vérifier que celle-ci satisfait la contrainte de poids.
- Le remplissage du sac peut être modélisé par un arbre binaire. La partie III utilise cette structure pour proposer l'écriture d'un algorithme naïf de résolution du problème, de complexité hélas exponentielle.
- La partie IV définit et applique un algorithme glouton sur un exemple simple de trois objets. La complexité de l'algorithme est analysée.
- Dans la partie V, on utilise la programmation dynamique. Le code est ici entièrement fourni, seule une application sur l'exemple est demandée.
- La partie VI utilise la structure d'arbre binaire pour appliquer un algorithme par séparation et évaluation, qui consiste à élaguer les branches inutiles de l'arbre.
- Un dernier algorithme, plus complexe, est développé dans la partie VII. Il s'agit d'une « optimisation par colonies de fourmis », qui reproduit le comportement biologique de ces insectes dans l'élaboration de la solution. La structure générale du code est proposée et on demande de la compléter.
- La dernière partie permet de comparer les résultats des différents algorithmes sur une situation plus complexe que l'exemple traité précédemment.

Cette épreuve traite avec cohérence un problème classique, avec des algorithmes connus et d'autres plus originaux. De nombreuses questions demandent d'exécuter du code sur de petits exemples. Si le découpage en nombreuses parties rend le sujet quelque peu haché, l'optimisation par colonies de fourmis est bien amenée et travaillée en profondeur. On peut regretter l'utilisation d'arbres binaires, outil hors programme dont le vocabulaire et les spécificités étaient inconnus de la plupart des candidats.

ECOLES NORMALES SUPERIEURES
ECOLE POLYTECHNIQUE

CONCOURS D'ADMISSION 2025

LUNDI 14 AVRIL 2025
08h00 - 12h00

FILIERE PSI - Epreuve n° 1

MATHEMATIQUES (XUSR)

Durée : 4 heures

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve

X/ENS Maths PSI 2025 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Vincent Ferrari-Dominguez (ENS Ulm) ; il a été relu par Pierrick Le Vourc'h (ENS de Lyon) et Angèle Niclas (enseignant-chercheur à l'université).

Nombre de problèmes, tant en mathématiques qu'en physique ou en informatique, peuvent être ramenés à l'étude des extrema d'une fonction. De nombreux algorithmes ont été développés pour répondre à cette problématique. L'un des plus étudiés et utilisés est l'algorithme de descente de gradient. Il consiste, dans sa version la plus simple, à suivre à chaque étape l'opposé du gradient de la fonction f à minimiser. Ce sujet a pour principal objectif d'en démontrer la convergence dans les cas classiques.

- La première partie établit que toute fonction continue qui tend vers $+\infty$ en $\pm\infty$ admet un minimiseur. Elle fixe ensuite le cadre de régularité considéré dans les trois premières parties : les fonctions réelles de classe $\mathscr{C}^1$ admettant un minimiseur x_* et dont la dérivée est lipschitzienne. Elle démontre dans ce cadre que la distance des itérés de la descente de gradient à ce minimiseur est une suite décroissante.
- La deuxième partie commence par l'étude d'un cas particulier puis montre la convergence linéaire de l'algorithme de descente de gradient pour une fonction α-convexe.
- La troisième partie commence elle aussi par l'étude d'un cas particulier illustrant le fonctionnement de l'algorithme dans des cas moins cléments (non unicité du minimiseur). Elle établit ensuite la convergence vers un minimiseur lorsque la fonction vérifie uniquement les hypothèses de la première partie.
- La quatrième partie relâche l'hypothèse de dérivabilité en étudiant une variante, la descente de gradient proximale, qui correspond à la descente de gradient implicite dans le cas des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$. Après quelques questions préliminaires et l'étude d'un exemple, la convergence vers un minimiseur est démontrée par une méthode semblable à celle de la troisième partie.
- La dernière partie étudie la minimisation de fonctions de plusieurs variables sur la boule unité. Elle caractérise d'abord le gradient de f aux minimiseurs selon que ces derniers sont à l'intérieur de la boule ou sur la sphère. Elle se penche ensuite sur l'algorithme de descente de gradient projeté dans le cas des formes quadratiques semi-définies négatives.

Ce long sujet porte presque exclusivement sur l'analyse réelle de première année et l'étude des fonctions convexes, avec une incursion dans le monde du calcul différentiel dans la dernière partie. Bien que les fonctions convexes ne soient pas au programme de PTSI ou de PCSI, leurs propriétés utiles sont rappelées en préambule du sujet, ce qui rend ce sujet accessible aux élèves de ces filières. Il est indispensable de maîtriser la réduction des endomorphismes symétriques pour traiter pleinement la dernière partie. La difficulté est essentiellement croissante le long du sujet et les parties sont indépendantes, à l'exception de la première qui est nécessaire aux autres.

ECOLE POLYTECHNIQUE - ESPCI
ECOLES NORMALES SUPERIEURES

CONCOURS D'ADMISSION 2025

JEUDI 17 AVRIL 2025
16h30 - 18h30

FILIERES MP-PC-PSI
Epreuve n° 8
INFORMATIQUE B (XELSR)

Durée : 2 heures

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve

X/ENS Informatique B MP-PC-PSI 2025 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Sarah Houdaigoui (ENS Ulm) ; il a été relu par Virgile Andreani (ENS Ulm) et Cyril Ravat (professeur en CPGE).

Le sujet examine le jeu de Röckse qui consiste à trouver, dans une grille de taille $\mathrm{N} \times \mathrm{N}$ contenant des gains et des pénalités, un chemin optimal partant de $(0, 0)$ et arrivant à $(\mathrm{N}-1, \mathrm{N}-1)$. Il se compose de quatre parties, de difficulté globalement croissante, et dont la dernière est indépendante des autres.

- La partie I vise à écrire plusieurs fonctions simples permettant de se familiariser avec le jeu. Une propriété des sauts autorisés dans la grille est également définie.
- La partie suivante tente une recherche exhaustive en explorant tous les chemins possibles d'une certaine longueur. Une analyse de complexité permet de montrer l'inefficacité de cet algorithme pour des chemins longs. On utilise ensuite brièvement la programmation dynamique pour améliorer la complexité de l'algorithme.
- La partie III propose de résoudre le problème à l'aide d'un algorithme glouton. Elle ne comporte que deux questions.
- La dernière partie est indépendante des trois autres. L'utilisation de codes binaires est abordée afin de stocker efficacement les cases bonus rencontrées. Le sujet guide ensuite progressivement le candidat dans la construction d'un algorithme de programmation dynamique : déterminer la formule de récurrence, énumérer l'ensemble des codes binaires possibles, compléter le code de la fonction principale, donner sa complexité et, finalement, extraire de la table de programmation dynamique le chemin optimal.

Le sujet se focalise sur l'algorithmique des listes. Il permet notamment de travailler les algorithmes de recherche exhaustive et leur complexité (partie II) et les algorithmes gloutons (partie III). La dernière partie comporte des questions de natures variées et, bien que progressive et guidée, elle demande une compréhension fine de la programmation dynamique. Certaines questions sont de haut niveau.